

Funciones de crecimiento en área basimétrica para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de repoblación en Galicia

U. Diéguez-Aranda^{1*}, F. Castedo Dorado² y J. G. Álvarez González¹

¹ Departamento de Ingeniería Agroforestal. Universidad de Santiago de Compostela. Escuela Politécnica Superior. Campus Universitario. 27002 Lugo. España

² Departamento de Ingeniería Agraria. Universidad de León. Escuela Superior y Técnica de Ingeniería Agraria. Avda. de Astorga. 24400 Ponferrada (León). España

Resumen

En este trabajo se desarrolla un sistema compatible de crecimiento en área basimétrica para masas regulares de *Pinus sylvestris* L. procedentes de plantación en Galicia (noroeste de España). Para su elaboración se utilizaron datos de un primer inventario de 155 parcelas localizadas en masas poco o nada aclaradas de la especie en la zona de estudio, y de un segundo inventario de 68 de dichas parcelas. El sistema consta de una ecuación de inicialización de área basimétrica y de una ecuación de proyección de esa misma variable. La primera es una ecuación de crecimiento obtenida por integración de una ecuación diferencial; la segunda se obtuvo a partir de la ecuación de inicialización expresando ésta en forma de diferencias algebraicas. La compatibilidad entre ambas ecuaciones se aseguró estimando independientemente los parámetros de la ecuación de proyección y sustituyéndolos en la de inicialización, procediendo posteriormente a un ajuste de ésta para estimar el valor del parámetro no común. Esta alternativa dio prioridad a la ecuación de proyección, en detrimento de la ecuación de inicialización, pues se consideró que el empleo más habitual del sistema será realizar proyecciones de área basimétrica a partir de unos datos iniciales obtenidos tras la realización de un inventario. El modelo que mejores resultados proporcionó fue el de Korf (con el parámetro b_1 libre), que explicó el 93,5% de la variabilidad total del área basimétrica proyectada mediante la ecuación en diferencias algebraicas. Este modelo estima el área basimétrica futura empleando como variables independientes el área basimétrica inicial y las edades inicial y final de proyección. La correspondiente ecuación de inicialización explicó el 71,9% de la variabilidad del área basimétrica en un determinado instante en el tiempo, y en ella el parámetro libre se relacionó de forma inversamente proporcional al índice de sitio.

Palabras clave: crecimiento y producción de plantaciones, modelos empíricos, modelos con base biológica, ecuaciones en diferencias algebraicas, compatibilidad.

Abstract

Stand basal area growth functions for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia

A compatible basal area growth system was developed for single-species, even-aged Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) stands in Galicia (northwestern Spain). The data used to develop the system were obtained from an inventory of 155 plots located in unthinned or lightly thinning stands and from a second inventory of 68 of these plots. The system consists of a function for predicting initial stand basal area and another for projecting stand basal area. The former is a growth function obtained by integration of a differential equation; the latter was obtained from the initialization function expressed as an algebraic difference equation. Compatibility between the two equations was ensured by estimating the projection function parameters separately, substituting their values into the initialization function, and then fitting this function to obtain the estimate of the remaining parameter. This method of proceeding gives priority to the projection function, and was selected because it was considered that the model projection would be used most frequently to estimate stand basal area from any given initial stand conditions obtained from a forest inventory. The model that provided the best results was based on the Korf's function (with b_1 as free parameter), which explained 93.5% of the variability of the stand basal area projected by the algebraic difference equation. This model estimates future stand basal area using initial basal area and initial and final ages as independent variables. The corresponding initialization equation explained 71.9% of the variability of the stand basal area at any point in time. In this case, the free parameter was expressed as a multiplicative inverse function of site index.

Key words: growth and yield of plantations, empirical models, biological-based models, algebraic difference equations, compatibility.

* Autor para la correspondencia: udieguez@lugo.usc.es

Recibido: 28-10-04; Aceptado: 11-07-05.

Introducción

El número de pies y el área basimétrica por unidad de superficie son las variables que se emplean con mayor frecuencia para cuantificar la densidad de una masa forestal cuando el objetivo es predecir su crecimiento y su producción en madera. Ambas variables son muy útiles cuando se trata con masas no aclaradas de una determinada edad y calidad de estación, aunque también son adecuadas para masas aclaradas en las que se conoce en detalle la historia de los tratamientos selvícolas efectuados (Clutter *et al.*, 1983). Por tal motivo, uno de los elementos más importantes en un modelo de crecimiento de masa es la ecuación que estima el crecimiento en área basimétrica. Esta variable está directamente relacionada con otras fundamentales como el volumen o el diámetro medio cuadrático, y es una herramienta básica para planificar las intervenciones selvícolas en las masas forestales. La función de crecimiento en área basimétrica también sirve de puente entre los modelos de alta y baja resolución (modelos de árbol individual y de masa, respectivamente), pues sus estimaciones marcan un valor límite que no debe sobrepasarse con los modelos de árbol individual (Gadow *et al.*, 2001).

Las funciones de crecimiento en área basimétrica deben poseer las siguientes características (Clutter *et al.*, 1983; Amaro *et al.*, 1997b; van Laar y Akça, 1997): (i) significado biológico, con un punto de inflexión coherente y una asíntota horizontal razonable para edades avanzadas, que se deben alcanzar antes en las mejores estaciones; (ii) invarianza, es decir, los valores de área basimétrica predichos en un instante futuro a partir de unas determinadas condiciones iniciales deben de ser iguales independientemente del número de pasos utilizados en su predicción; y (iii) sencillez, ya que los modelos demasiado complejos y con muchas interacciones entre las variables independientes pueden verse afectados por la existencia de correlación entre las mismas, siendo por tanto inestables y poseyendo una capacidad predictiva inferior a la de otros modelos más simples, incluso aunque el ajuste de estos últimos a los datos experimentales sea relativamente peor.

Los primeros trabajos sobre el crecimiento del área basimétrica de las masas forestales utilizaron funciones que tradicionalmente se han clasificado como empíricas (al no considerar explícitamente la biología del crecimiento) que, si bien pueden producir estimaciones aceptables del crecimiento en área basimétrica,

pueden no cumplir todas las propiedades matemáticas inherentes a una función de crecimiento. Sin embargo, en los últimos años se ha mostrado un mayor interés por los modelos en forma de diferencias algebraicas obtenidos a partir de verdaderas funciones de crecimiento derivadas de ecuaciones diferenciales, ya que las ecuaciones obtenidas mediante esta metodología cumplen las tres condiciones mencionadas y permiten tener en cuenta las trayectorias observadas en parcelas inventariadas al menos en dos ocasiones.

En general, una ecuación en diferencias algebraicas tiene la forma:

$$y_2 = f(t_2, t_1, y_1) \quad [1]$$

donde y_2 es el valor de la variable analizada a una edad t_2 , e y_1 es el valor de la misma variable a una edad t_1 . En esta metodología se asume que las condiciones iniciales (t_1 e y_1) contienen suficiente información acerca de la trayectoria de crecimiento de la masa como para poder realizar estimaciones con bastante exactitud (Amaro *et al.*, 1997a). No obstante, es posible conseguir una mejora de las estimaciones incluyendo además otras variables de estado (variables que permiten describir adecuadamente el sistema en cualquier punto del tiempo –García, 1988) en el instante inicial de la proyección, como por ejemplo la altura dominante o el número de pies por hectárea, o que se pueden obtener a partir de ellas, como por ejemplo el índice de sitio. En otros casos, es conveniente incluir también el valor de dichas variables de estado a la edad futura de proyección. Estos valores futuros se obtienen mediante una función de transición específica para cada una de dichas variables, es decir, mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias algebraicas que describan su tasa de cambio (García, 1988), como por ejemplo un sistema de curvas de calidad de estación para proyectar la altura dominante, o una función de mortalidad para proyectar el número de pies. En general, no es necesario incluir en las funciones de transición variables de control (variables que intervienen en puntos discretos del tiempo, causando un cambio de estado instantáneo –García, 1988), como por ejemplo los tratamientos selvícolas de claras. Así, se pueden modelizar los cambios de estado entre tratamientos sucesivos como una función solamente del estado actual, sin tener en cuenta las variables de control (García, 1988).

En este trabajo la ecuación en diferencias algebraicas se denomina ecuación de proyección, y su empleo para realizar estimaciones de los valores futuros de la variable dependiente para una masa que ha sido in-

ventariada es directo. Sin embargo, cuando se pretende utilizar la ecuación en diferencias algebraicas para proyectar el crecimiento de una masa forestal en la que no se ha realizado un inventario, es necesario utilizar previamente una función de inicialización que permita estimar el valor de la variable independiente y_1 en el instante inicial t_1 en función de otras variables de estado o derivadas a partir de ellas. Ambas funciones, la de proyección y la de inicialización, deben de ser compatibles, es decir, para una misma curva de crecimiento en área basimétrica, deben proporcionar estimaciones iguales de esta variable independientemente de la edad inicial empleada en la ecuación de proyección. Para asegurar dicha compatibilidad es necesario que la ecuación de inicialización se corresponda con la función de crecimiento a partir de la que se ha obtenido la ecuación de proyección en diferencias algebraicas, o viceversa (Pienaar *et al.*, 1990; Rockwood *et al.*, 1997; Tomé *et al.*, 2001). Además, los parámetros comunes de ambas ecuaciones deben tomar los mismos valores.

En España se han elaborado varios modelos de crecimiento para las masas de *Pinus sylvestris* L.: García Abejón (1981), García Abejón y Gómez Loranca (1984), García Abejón y Tella (1986), Rojo y Montero (1996), y Bravo (1998) desarrollaron tablas de producción para las masas naturales de las principales ecoregiones existentes; Río y Montero (2001) desarrollaron un modelo dinámico de crecimiento para los Sistemas Central e Ibérico, tanto para masas naturales como para plantaciones; y Palahí *et al.* (2002, 2003) desarrollaron un modelo dinámico de crecimiento de masa y un modelo de crecimiento de árbol individual independiente de la distancia para las masas naturales en el noreste de España. En Galicia, estudios preliminares (Martínez Chamorro *et al.*, 1997) mostraron que el patrón de crecimiento de las plantaciones de esta especie era significativamente diferente al de las masas del resto de España. Sin embargo, y a pesar de la importancia superficial y económica de *Pinus sylvestris* en Galicia (los datos del Tercer Inventario Forestal Nacional indican que este pino aparece como formación forestal dominante en 63.195 ha —Xunta de Galicia, 2001—, con plantaciones de más de 55 años), todavía no existe ninguna herramienta específica para su gestión selvícola.

El objetivo de este trabajo es ajustar una ecuación de proyección y otra de inicialización de área basimétrica para masas poco o nada aclaradas de *Pinus sylvestris* procedentes de repoblación en Galicia. Es nece-

sario explicar que al hacer referencia a masas no aclaradas no se está asegurando que se trate de rodales en los que no se haya efectuado ninguna corta de mejora con anterioridad a la instalación de las parcelas, pero sí se puede afirmar que estos rodales están en un estado de alta competencia y que no han sido objeto de claras en los años previos a su medición, ni en el intervalo de tiempo transcurrido entre mediciones.

Material y Métodos

Datos

Los datos utilizados en este trabajo proceden de una red de 155 parcelas que la *Unidade de Xestión Forestal Sostible* de la Universidad de Santiago de Compostela estableció entre 1996 y 1997 para elaborar modelos forestales de crecimiento. Dicha red de parcelas está distribuida por las zonas en las que *Pinus sylvestris* está presente en Galicia, y trata de cubrir las diferentes edades, densidades y calidades de estación existentes en masas puras y regulares de este pino procedentes de plantación. El tamaño de parcela osciló entre 625 m² y 1.200 m², dependiendo de la densidad de la masa, para obtener un mínimo de 60 árboles en cada parcela. En cada localización se tomaron datos de edad y diferentes factores relacionados con la fisiografía, la vegetación y el estado fitosanitario de la masa. Además, se etiquetaron con una chapa numerada todos los árboles de cada parcela y en ellos se realizaron dos mediciones perpendiculares del diámetro normal (a 1,3 m sobre el nivel del suelo), utilizando una forcípula con graduación milimétrica. Asimismo, se midió con hipsómetro la altura total de 30 árboles elegidos aleatoriamente en cada parcela, y de la proporción, en función de la superficie de la misma, de los 100 pies más gruesos por hectárea con aspecto de dominantes. Se anotaron también variables descriptivas de cada árbol, como por ejemplo si estaban vivos o muertos, o si presentaban alguna deformación y de qué tipo.

En el invierno de 2003 se remidieron 79 de las 155 parcelas instaladas inicialmente. El resto de parcelas se descartaron por haber sido afectadas por fuego, por haber sido clareadas muy intensamente, o por haber desaparecido como consecuencia de la corta a hecho de la masa en la que estaban localizadas. Aunque el número de parcelas inventariadas por segunda vez se redujo considerablemente con respecto a las del pri-

mer inventario, las parcelas medidas en dos ocasiones proporcionan una mejor información sobre el desarrollo de las masas forestales, por lo que se consideraron suficientes para desarrollar un modelo dinámico de crecimiento en área basimétrica para la especie en la zona de estudio. De entre los 79 inventarios realizados en 2003, fueron excluidos de la base de datos utilizada en el presente estudio los correspondientes a parcelas sometidas a algún tratamiento selvícola de clara del que no se obtuvo información sobre la manera en que fue ejecutado. Tras una comprobación de errores y el análisis de las parcelas instaladas en condiciones extremas, el número definitivo de parcelas empleadas en este trabajo se redujo a 155 del primer inventario y a 68 del segundo.

Para cada inventario y parcela seleccionada se calcularon las siguientes variables de masa: edad, número de pies por hectárea, área basimétrica, altura dominante (definida como la altura media de los 100 árboles más gruesos por hectárea) e índice de sitio. Esta variable se calculó para una edad de referencia de 40 años, utilizando el siguiente modelo para masas de *Pinus sylvestris* en Galicia (Diéguez-Aranda et al., 2005):

$$H_{02} = \frac{51,39}{1 - \left(1 - \frac{51,39}{H_{01}}\right) \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{1,277}} \quad [2]$$

donde H_{01} es la altura dominante a la edad t_1 , y H_{02} y t_2 deben reemplazarse respectivamente por el índice de sitio y la edad de referencia.

En la Tabla 1 se muestran los valores obtenidos en el análisis descriptivo de las principales variables de masa de las parcelas seleccionadas en el primer y segundo inventarios. Los datos utilizados se corresponden con valores de área basimétrica con corteza de los pies vivos, ya que no se dispuso de datos de crecimiento

del espesor de corteza entre los dos inventarios, por lo que las estimaciones de área basimétrica que se obtendrán con el modelo considerarán tanto el crecimiento en madera como el crecimiento en corteza.

Para realizar el ajuste de la ecuación de proyección se emplearon los datos de los inventarios de las 68 parcelas medidas en dos ocasiones, mientras que el ajuste de la ecuación de inicialización se efectuó con los datos de los 155 inventarios realizados entre 1996 y 1997 y los 68 de 2003. Por último, es necesario destacar que en el ajuste de la ecuación de proyección sólo se consideraron intervalos de crecimiento ascendentes (de t_1 a t_2), ya que no parece muy lógica la utilización del modelo para realizar estimaciones en instantes de tiempo pasados.

Modelos analizados

El crecimiento en área basimétrica de un rodal regular o coetáneo depende de su edad, de su densidad (definida por el número de pies por hectárea o el área basimétrica) y de la productividad de la estación (Murphy y Farrar, 1988; Oliver y Larson, 1996). Sin embargo, no todas las ecuaciones que han sido utilizadas para proyectar el área basimétrica consideran estas variables conjuntamente.

En este trabajo se han analizado catorce ecuaciones de proyección de área basimétrica (Tabla 2) y sus correspondientes ecuaciones de inicialización (Tabla 3). Tres de ellas derivan de la ecuación propuesta por Clutter (1963). Esta ecuación, expresada en diferencias algebraicas, proyecta el área basimétrica a una edad determinada en función del área basimétrica y la edad iniciales, la edad de proyección y el índice de sitio, y ha sido empleada con éxito en numerosos trabajos posteriores (Clutter y Jones, 1980; Woollons y Hayward,

Tabla 1. Resumen de datos de los inventarios empleados en el presente estudio

Variable	1 ^{er} inventario (155 parcelas)				2 ^o inventario (68 parcelas)			
	Media	Máx.	Mín.	Desv. estánd.	Media	Máx.	Mín.	Desv. estánd.
<i>t</i>	32,7	48,0	12,0	7,8	39,7	55,0	21,0	7,8
<i>N</i>	1.433	2.720	600	425,5	1.247	2.112	580	340,0
<i>G</i>	34,3	74,2	4,2	14,4	44,6	72,6	16,2	11,3
<i>H</i> ₀	12,1	22,6	4,0	4,3	15,5	24,0	9,0	3,9
<i>IS</i>	15,1	24,1	7,0	3,9	15,8	22,6	7,3	3,1

t: edad (años). *N*: número de pies vivos por hectárea. *G*: área basimétrica (m² ha⁻¹). *H*₀: altura dominante (m). *IS*: índice de sitio (m, t_{ref} = 40 años).

Tabla 2. Modelos de proyección de área basimétrica en forma de diferencias algebraicas

Autor	Modelo
Clutter (1963)	$\ln G_2 = \ln G_1 \left(\frac{t_1}{t_2} \right) + b_1 \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right) + b_2 \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right) IS$
Bennett (1970)	$\ln G_2 = \ln G_1 \left(\frac{t_1}{t_2} \right) + b_1 \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right)$
Souter (1986)	$\ln G_2 = \ln G_1 \left(\frac{t_1}{t_2} \right) + b_1 \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right) + b_2 \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right) IS + b_3 \left(\ln N_2 - \left(\frac{t_1}{t_2} \right) \ln N_1 \right)$
Pienaar y Shiver (1986)	$\ln G_2 = \ln G_1 + b_1 \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) + b_2 (\ln N_2 - \ln N_1) + b_3 (\ln H_{0_2} - \ln H_{0_1}) + b_4 \left(\frac{\ln N_2}{t_2} - \frac{\ln N_1}{t_1} \right) + b_5 \left(\frac{\ln H_{0_2}}{t_2} - \frac{\ln H_{0_1}}{t_1} \right)$
Borders y Bailey (1986)	$\ln G_2 = \ln G_1 + b_1 (\ln H_{0_2} - \ln H_{0_1})$
Pienaar <i>et al.</i> (1990)	$\ln G_2 = \ln G_1 + b_1 \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) + b_3 (\ln N_2 - \ln N_1) + b_2 (\ln H_{0_2} - \ln H_{0_1})$
Forss (1994)	$\ln G_2 = \ln G_1 + b_1 \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right) + b_2 (\ln H_{0_2} - \ln H_{0_1})$
Hui y Gadow (1993)	$\ln G_2 = \ln G_1 + (1 - b_1 H_{0_2}^{b_2}) \ln N_2 + (b_1 H_{0_1}^{b_2} - 1) \ln N_1 + b_3 (\ln H_{0_2} - \ln H_{0_1})$
Bertalanffy-Richards (b_0)	$\ln G_2 = \ln G_1 + b_2 \left(\ln(1 - e^{-b_1 t_2}) - \ln(1 - e^{-b_1 t_1}) \right)$
Bertalanffy-Richards (b_1)	$\ln G_2 = \ln b_0 + b_2 \ln \left[1 - \left(1 - \left(\frac{G_1}{b_0} \right)^{1/b_2} \right)^{t_2/t_1} \right]$
Bertalanffy-Richards (b_2)	$\ln G_2 = \ln b_0 + \frac{\ln(1 - e^{-b_1 t_2})}{\ln(1 - e^{-b_1 t_1})} \ln \left(\frac{G_1}{b_0} \right)$
Korf (b_0)	$\ln G_2 = \ln G_1 + b_1 (t_1^{-b_2} - t_2^{-b_2})$
Korf (b_1)	$\ln G_2 = \ln b_0 + \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{b_2} \ln \left(\frac{G_1}{b_0} \right)$
Korf (b_2)	$\ln G_2 = \ln b_0 - b_1 t_2 \left(\frac{\ln \left(\frac{\ln(G_1/b_0)}{-b_1} \right)}{\ln t_1} \right)$

b_i : parámetros a estimar. Los subíndices 1 y 2 que acompañan a las variables de masa hacen referencia a dichas variables a las edades t_1 y t_2 .

Tabla 3. Modelos de inicialización de área basimétrica

Autor	Modelo
Clutter (1963)	$\ln G = \frac{b_0 + b_1 t + b_2 t IS}{t}$
Bennett (1970)	$\ln G = \frac{b_0 + b_1 t}{t}$
Souter (1986)	$\ln G = \frac{b_0 + b_1 t + b_2 t IS + b_3 t \ln N}{t}$
Pienaar y Shiver (1986)	$\ln G = b_0 + \frac{b_1}{t} + b_2 \ln N + b_3 \ln H_0 + b_4 \frac{\ln N}{t} + b_5 \frac{\ln H_0}{t}$
Borders y Bailey (1986)	$\ln G = b_0 + b_1 \ln H_0$
Pienaar <i>et al.</i> (1990)	$\ln G = b_0 + \frac{b_1}{t} + b_2 \ln N + b_3 \ln H_0$
Forss (1994)	$\ln G = b_0 + \frac{b_1}{t} + b_2 \ln H_0$
Hui y Gadow (1993)	$\ln G = b_0 + (1 - b_1 H_0^{b_2}) \ln N + b_3 \ln H_0$
Bertalanffy-Richards (b_0)	$\ln G = \ln(b_0 IS) + b_2 \ln(1 - e^{-b_1 t})$
Bertalanffy-Richards (b_1)	$\ln G = \ln b_0 + b_2 \ln(1 - e^{-b_1 IS t})$
Bertalanffy-Richards (b_2)	$\ln G = \ln b_0 + \frac{b_2}{IS} \ln(1 - e^{-b_1 t})$
Korf (b_0)	$\ln G = \ln(b_0 IS) - b_1 t^{-b_2}$
Korf (b_1)	$\ln G = \ln b_0 - \frac{b_1}{IS} t^{-b_2}$
Korf (b_2)	$\ln G = \ln b_0 - b_1 t^{-b_2}$

Los parámetros que no aparecen en las correspondientes ecuaciones de proyección de la Tabla 2 son los parámetros libres, y el resto de parámetros son compartidos por las dos ecuaciones del sistema.

1985; Knoebel *et al.*, 1986; Zarnoch *et al.*, 1991; Río, 1999). Las ecuaciones de Bennett (1970) y Souter (1986), también empleadas en este trabajo, son modificaciones de la Clutter en las que se reduce y aumenta respectivamente el número de variables regresoras.

Otras cuatro ecuaciones utilizadas en este estudio derivan de la propuesta por Pienaar y Shiver (1986), en la que el crecimiento en área basimétrica se expresa en función de distintas combinaciones de la edad, el número de pies por hectárea y la altura dominante, y que sirvió de base para varias modificaciones pos-

teriores (ver por ejemplo Pienaar y Harrison, 1988), de las cuales se han utilizado tres: Borders y Bailey (1986), Pienaar *et al.* (1990) y Forss (1994).

También se ha incluido la ecuación de proyección de área basimétrica de Hui y Gadow (1993), que considera el área basimétrica inicial y el número de pies por hectárea y la altura dominante en los instantes iniciales y finales como variables regresoras.

Los seis modelos restantes son ecuaciones en diferencias algebraicas que se derivan a partir de la forma integral de las funciones de Bertalanffy-Richards

(Bertalanffy, 1949, 1957; Richards, 1959) y de Korf (citado en Lundqvist, 1957). Un ejemplo del empleo de este tipo de ecuaciones es el sistema de evolución de área basimétrica desarrollado por Tomé *et al.* (2001) para *Eucalyptus globulus* Labill. en Portugal, desarrollado a partir del modelo de Korf, y en el que se relaciona alguno de sus parámetros con diferentes variables de masa.

La forma de obtener las ecuaciones en diferencias algebraicas se ejemplifica a continuación para la función de crecimiento de Korf, cuya forma integral es:

$$y = b_0 e^{-b_1 t^{-b_2}} \quad [3]$$

Considerando el parámetro b_1 como libre, se obtienen respectivamente para los instantes t_1 y t_2 :

$$y_1 = b_0 e^{-b_1 t_1^{-b_2}} \Rightarrow \ln y_1 = \ln b_0 - b_1 t_1^{-b_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{b_0}{y_1} \right) = b_1 t_1^{-b_2} \Rightarrow b_1 = \ln \left(\frac{b_0}{y_1} \right)^{t_1^{b_2}} \quad [4]$$

$$y_2 = b_0 e^{-b_1 t_2^{-b_2}} \Rightarrow b_1 = \ln \left(\frac{b_0}{y_2} \right)^{t_2^{b_2}} \quad [5]$$

Igualando las expresiones [4] y [5] y despejando y_2 , se obtiene la siguiente expresión en forma de diferencias algebraicas:

$$\ln \left(\frac{b_0}{y_1} \right)^{t_1^{b_2}} = \ln \left(\frac{b_0}{y_2} \right)^{t_2^{b_2}} \Rightarrow \left(\frac{b_0}{y_1} \right)^{t_1^{b_2}} = \left(\frac{b_0}{y_2} \right)^{t_2^{b_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = b_0 \left(\frac{y_1}{b_0} \right)^{\left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{b_2}} \quad [6]$$

La familia de curvas para esta ecuación en diferencias algebraicas queda definida por los parámetros b_0 y b_2 , pudiéndose obtener del mismo modo, y para esta misma función de crecimiento, otras dos ecuaciones en diferencias algebraicas considerando los parámetros b_0 y b_2 como libres.

Para mejorar las estimaciones de la ecuación de inicialización de Bertalanffy-Richards y de Korf, que en principio sólo dependen de la edad, y debido a la teórica (y real) relación entre el área basimétrica en un determinado momento y la calidad de estación, se incluyó el índice de sitio acompañando al parámetro libre utilizado para obtener las ecuaciones en diferen-

cias algebraicas. En las primeras fases de este trabajo se incluyeron también otras variables como el número de pies por hectárea y la altura dominante, aunque no mejoraron significativamente las estimaciones de la ecuación de inicialización.

Todas las ecuaciones de proyección tienen la propiedad de ser invariantes independientemente del intervalo de proyección considerado, siempre y cuando las estimaciones futuras de las variables independientes que forman parte del modelo se obtengan también a partir de funciones invariantes y que, además, no se produzcan alteraciones del estado de la masa durante el intervalo de proyección, como por ejemplo las debidas a la realización de claras.

Ajuste y selección de los modelos

Para ajustar las ecuaciones de proyección y de inicialización de área basimétrica, manteniendo la compatibilidad entre ambas y teniendo en cuenta las trayectorias de las observaciones de las parcelas medidas al menos en dos ocasiones, se puede proceder de dos maneras: (i) estimar independientemente los parámetros de la ecuación de proyección y sustituirlos en la de inicialización, procediendo posteriormente a un ajuste de esta última para estimar el valor de los parámetros no comunes; o (ii) estimar todos los parámetros de las dos ecuaciones simultáneamente.

La primera alternativa requiere dar prioridad a la ecuación de proyección, minimizando por tanto la suma de cuadrados de los residuos de la misma, y forzando a que la ecuación de inicialización se ajuste con los parámetros comunes fijos. La segunda alternativa minimiza la suma de cuadrados de los residuos de todo el sistema, optimizando de manera conjunta las ecuaciones de inicialización y de proyección. La elección entre una u otra alternativa depende del uso que se vaya a hacer del modelo. Teniendo en cuenta que en este caso el empleo más habitual será realizar proyecciones de área basimétrica a partir de unos datos iniciales obtenidos tras la realización de un inventario, se utilizó la primera alternativa en detrimento del funcionamiento de la ecuación de inicialización.

En un principio se consideró la realización del ajuste de los modelos empleando como variable dependiente el área basimétrica G_2 a la edad t_2 ; sin embargo, en muchas relaciones de este tipo los errores se distribuyen siguiendo una distribución lognormal, por lo que se decidió finalmente realizar una transforma-

ción logarítmica para ponderar las observaciones y corregir la posible presencia de heterocedasticidad.

La mayoría de los modelos descritos son intrínsecamente no lineales, por lo que la estimación de los parámetros requiere el empleo de un procedimiento iterativo (Draper y Smith, 1981). En este trabajo se utilizó el algoritmo de Gauss-Newton (Hartley, 1961), que está implementado en el procedimiento NLIN del paquete estadístico SAS/STAT® (SAS Institute Inc., 2004). Los valores iniciales para comenzar el procedimiento de estimación se tomaron de los resultados obtenidos por otros autores en estudios similares. En los casos en que esto no fue posible se probaron diferentes valores iniciales para asegurar que la solución obtenida fuese global y no correspondiese a un óptimo local.

El análisis de la capacidad de ajuste de los modelos se basó en comparaciones numéricas y gráficas. Así, a partir de los residuos, se calcularon, los siguientes estadísticos: el sesgo (\bar{E}), que evalúa las desviaciones sistemáticas del modelo respecto a los valores observados; el error medio cuadrático (EMC), que analiza la precisión de las estimaciones; el coeficiente de determinación ajustado (R_{adj}^2), que refleja la proporción de la variabilidad total que es explicada por el modelo teniendo en cuenta el número total de parámetros a estimar; y el criterio de información de Akaike en diferencias ($AICd$), que es un índice que se emplea para seleccionar el mejor modelo y se basa en minimizar la distancia de Kullback-Lieber (Burnham y Anderson, 1998). Las expresiones de estos estadísticos son las siguientes:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad [7]$$

$$EMC = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} \quad [8]$$

$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad [9]$$

$$AICd = n \log \hat{\sigma}^2 + 2k - \min(n \log \hat{\sigma}^2 + 2k) \quad [10]$$

donde y_i , \hat{y}_i e \bar{y} son, respectivamente, los valores observado, predicho y promedio de la variable dependiente (aunque los ajustes se realizaron considerando como variable dependiente el logaritmo del área basi-

métrica, para calcular los estadísticos de comparación se deshizo la transformación logarítmica y se empleó directamente el área basimétrica); n es el número total de observaciones utilizado para ajustar el modelo; p es el número de parámetros a estimar; $k = p + 1$; y $\hat{\sigma}^2$ es el estimador de la varianza del error del modelo obtenido como:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad [11]$$

Debido a que la bondad del ajuste no refleja necesariamente la bondad de una predicción futura (Myers, 1990), sería deseable realizar una validación del modelo con un conjunto independiente de datos (Kozak y Kozak, 2003). Se han propuesto varios métodos para realizar dicha validación cuando no se dispone de un conjunto adicional de datos (p. ej., dividir la muestra en dos grupos y utilizar uno para el ajuste y el otro para la validación, emplear validación cruzada, etc.), aunque generalmente no proporcionan ninguna información adicional en comparación con los respectivos estadísticos obtenidos directamente a partir de los modelos ajustados utilizando el conjunto total de datos (Kozak y Kozak, 2003). Por tal motivo, y debido a que las decisiones deben tomarse con la información disponible, se ha optado por esperar a recoger nuevos datos antes de llevar a cabo la validación del modelo.

Además de los estadísticos descritos, una de las maneras más eficientes de evaluar la capacidad de ajuste de un modelo es la inspección visual, por lo que se analizaron los gráficos de residuos frente a valores predichos tanto para la ecuación de inicialización como para la de proyección. Estos gráficos son útiles para detectar posibles tendencias sistemáticas de los datos y para seleccionar factores de ponderación si fuesen necesarios debido a la presencia de heterocedasticidad.

Resultados y Discusión

En la Tabla 4 se muestran las estimaciones de los parámetros y los errores estándar aproximados obtenidos para cada ecuación mediante el procedimiento de ajuste en dos etapas empleado. A partir de ellos se calculó el valor aproximado del estadístico t de Student y su valor de probabilidad asociado. Los parámetros b_2 y b_5 del modelo de Pienaar y Shiver (1986) no resultaron significativamente distintos de cero a un 5% de probabilidad; lo mismo sucedió con el paráme-

Tabla 4. Estimaciones, errores estándar aproximados y contrastes de significación de los parámetros de los modelos analizados

Modelo	Parámetro	Estimación	Error estándar aproximado	t-valor	Prob. > Abs(t)
Clutter (1963)	b_0	-43,9912	1,173	-37,5	< 0,001
	b_1	5,8146	0,230	25,3	< 0,001
	b_2	-0,0581	0,014	-4,1	< 0,001
Bennett (1970)	b_0	4,8915	0,049	99,0	< 0,001
	b_1	-42,9001	0,813	-52,8	< 0,001
Souter (1986)	b_0	-47,2172	1,126	-41,9	< 0,001
	b_1	3,9912	0,609	6,6	< 0,001
	b_2	-0,0493	0,014	-3,6	< 0,001
	b_3	0,2507	0,078	3,2	0,002
Pienaar y Shiver (1986)	b_0	2,0249	0,015	135,0	< 0,001
	b_1	-145,861	27,614	-5,3	< 0,001
	b_2	-0,0055	0,154	0,0	0,971
	b_3	0,8501	0,147	5,8	< 0,001
	b_4	17,1568	3,924	4,4	< 0,001
	b_5	1,3511	4,010	0,3	0,736
Borders y Bailey (1986)	b_0	0,0621	0,017	3,6	< 0,001
	b_1	1,3761	0,070	19,6	< 0,001
Pienaar <i>et al.</i> (1990)	b_0	-1,9699	0,015	-134,0	< 0,001
	b_1	-19,2186	4,159	-4,6	< 0,001
	b_2	0,5171	0,111	4,7	< 0,001
	b_3	0,9448	0,149	6,4	< 0,001
Forss (1994)	b_0	2,1918	0,017	126,0	< 0,001
	b_1	-19,1613	4,771	-4,0	< 0,001
	b_2	0,7656	0,165	4,6	< 0,001
Hui y Gadow (1993)	b_0	-2,5082	0,016	-159,8	< 0,001
	b_1	0,9801	0,007	135,7	< 0,001
	b_2	-0,6601	0,315	-2,1	0,037
	b_3	0,0916	0,209	0,4	0,662
Bertalanffy-Richards (b_0)	b_0	5,5778	0,095	58,8	< 0,001
	b_1	0,0396	0,009	4,3	< 0,001
	b_2	2,7504	0,452	6,1	< 0,001
Bertalanffy-Richards (b_1)	b_0	65,1705	2,659	24,6	< 0,001
	b_1	0,0049	0,0001	92,6	< 0,001
	b_2	5,1542	0,554	9,3	< 0,001
Bertalanffy-Richards (b_2)	b_0	73,8991	4,994	14,8	< 0,001
	b_1	0,0512	0,006	8,9	< 0,001
	b_2	52,6165	0,935	56,2	< 0,001
Korf (b_0)	b_0	14,892	0,253	58,86	< 0,001
	b_1	21,276	6,883	3,09	0,002
	b_2	0,6985	0,171	4,08	< 0,001
Korf (b_1)	b_0	92,3964	8,612	10,73	< 0,001
	b_1	1592,896	22,331	71,33	< 0,001
	b_2	1,3686	0,120	11,41	< 0,001
Korf (b_2)	b_0	84,3693	6,962	12,1	< 0,001
	b_1	149,4731	49,968	3,0	0,003
	b_2	1,4984	0,009	168,5	< 0,001

tro b_3 del modelo de Hui y Gadow (1993). En ambos casos se trata de parámetros que acompañan a variables ya incluidas en otros términos del modelo.

En la Tabla 5 se exponen los estadísticos de comparación de los modelos analizados. A la vista de los mismos se observa que al incluir en las ecuaciones de proyección empíricas, derivadas de la misma expresión matemática, variables independientes como la altura dominante, el índice de sitio o el número de pies por hectárea, mejoran las estimaciones. De este modo, la ecuación de Souter (1986), que incluye la edad, el índice de sitio y el número de pies por hectárea mejora los resultados de la ecuación de Clutter (1963), que no incluye el número de pies, y esta última mejora los resultados de la de Bennett (1970), que depende sólo de la edad. Idénticos resultados se obtienen con las ecuaciones derivadas de la de Pienaar y Shiver (1986), que mejora los resultados de las ecuaciones de Pienaar *et al.* (1990), Forss (1994) y Borders y Bailey (1986), aunque a costa de una excesiva parametrización que trae consigo problemas de multicolinealidad que afectan a la significación de determinados parámetros, como ya se ha comentado.

Por otra parte, también se observa que en las ecuaciones derivadas a partir de verdaderas funciones de crecimiento (Bertalanffy-Richards y Korf), el área basimétrica y la edad iniciales, junto con la edad de proyección explicaron prácticamente la misma variabili-

dad que las mejores ecuaciones empíricas, que incluyen, en general, más variables independientes. Esto puede ser debido a que la edad es la variable explicativa más importante en las funciones de crecimiento de variables de estado (entre ellas el área basimétrica) para rodales regulares, pues condiciona los procesos fisiológicos asociados al crecimiento. Así, aunque la forma exacta de la curva de crecimiento acumulado depende de la variable considerada, tiene siempre características similares para todas ellas, de manera que las distintas etapas de la vida de una masa regular (juventud, madurez y senectud o vejez) se ven reflejadas en la curva de crecimiento acumulado. Para los modelos derivados de estas dos funciones de crecimiento, los peores resultados los proporcionaron las ecuaciones en diferencias algebraicas obtenidas al considerar b_0 como parámetro libre, es decir, cuando se obtienen curvas de crecimiento en área basimétrica proporcionales o anamórficas. En este caso el valor del coeficiente de determinación ajustado de la ecuación de proyección se redujo de 0,93-0,94 a 0,78 para el modelo de Bertalanffy-Richards, y de 0,92-0,93 a 0,78 para el modelo de Korf (ver Tabla 5).

Considerando todas las funciones de proyección analizadas conjuntamente, los mejores resultados los proporcionaron los modelos de Souter (1986), Clutter (1963), Bertalanffy-Richards (con el parámetro b_2 libre) y Korf (con el parámetro b_1 libre), que explicaron

Tabla 5. Estadísticos de comparación¹ de los modelos analizados

Modelo	Proyección				Inicialización			
	\bar{E}	EMC	R^2_{adj}	AICd	\bar{E}	EMC	R^2_{adj}	AICd
Clutter (1963)	-0,103	7,1	0,945	18	-2,115	189,2	0,084	341
Bennett (1970)	-0,247	10,1	0,922	41	-0,493	140,0	0,322	274
Souter (1986)	0,069	5,3	0,959	0	-2,552	186,4	0,098	340
Pienaar y Shiver (1986)	-0,216	12,6	0,903	60	-0,249	41,1	0,801	0
Borders y Bailey (1986)	-1,539	28,7	0,779	112	-0,565	86,7	0,580	167
Pienaar <i>et al.</i> (1990)	-0,429	14,7	0,886	69	-0,234	45,3	0,781	22
Forss (1994)	-1,329	23,8	0,816	101	0,670	65,8	0,681	105
Hui y Gadow (1993)	-0,482	14,0	0,892	66	0,622	67,9	0,671	112
Bertalanffy-Richards (b_0)	-0,976	28,3	0,782	112	0,225	67,0	0,676	109
Bertalanffy-Richards (b_1)	0,194	8,4	0,935	30	-1,998	66,4	0,679	107
Bertalanffy-Richards (b_2)	0,071	7,7	0,940	24	0,496	66,0	0,681	106
Korf (b_0)	-0,979	28,4	0,781	113	0,243	66,6	0,678	108
Korf (b_1)	0,205	8,5	0,935	30	-0,637	58,0	0,719	77
Korf (b_2)	0,410	9,9	0,924	41	-1,470	140,3	0,321	274

¹ Estadísticos calculados para la variable dependiente área basimétrica una vez deshecha la transformación logarítmica utilizada para realizar los ajustes.

respectivamente el 95,9%, 94,5%, 94,0% y 93,5% de la variabilidad total del área basimétrica proyectada. Sin embargo, es importante destacar el pésimo resultado mostrado por las ecuaciones de Souter (1986) y Clutter (1963) en el ajuste de la ecuación de inicialización (con certeza debido a la metodología de ajuste en dos pasos utilizada, en la que los parámetros compartidos de la ecuación de inicialización se sustituyeron por los obtenidos en el ajuste de la de proyección). Estos malos resultados se deben a que el valor estimado del parámetro b_2 en el ajuste de la ecuación de proyección de ambos modelos (parámetro que acompaña al índice de sitio) es negativo. Este signo está en contra del comportamiento biológico que deberían adoptar las ecuaciones de inicialización y de proyección, y se debe, posiblemente, al poco peso que tiene el término del índice de sitio en la ecuación de proyección, que se plasma en un valor muy cercano a cero aunque significativamente diferente (ver Tabla 4). Otros trabajos que analizaron el crecimiento en área basimétrica en masas de diferentes especies de pinos (p. ej., Buckman, 1962; Bennett, 1970; Río, 1999; Álvarez González *et al.*, 1999) tampoco encontraron significativa la inclusión del índice de sitio. Estos resultados se ven alterados al ajustar los dos sistemas de ecuaciones simultáneamente a costa de reducir de forma notable la capacidad predictiva de la ecuación de proyección. Así, realizando el ajuste simultáneo, las ecuaciones de proyección pasaron a explicar el 86,2% y el 87,7% de la variabilidad total para los modelos de Clutter (1963) y Souter (1986), respectivamente, mientras que para las ecuaciones de inicialización la variabilidad explicada aumentó hasta el 68,3% y el 77,2%.

Por otra parte, los modelos de Bertalanffy-Richards y Korf proporcionaron resultados aceptables en la

ecuación de inicialización (explicaron el 68,1% y el 71,9% de la variabilidad del área basimétrica, respectivamente). El hecho de que incluyan el índice de sitio como variable explicativa unido al valor del parámetro que acompaña a esta variable demuestra que, para las condiciones de masas poco o nada aclaradas como las que se han analizado en este estudio, la producción en área basimétrica es superior en las mejores estaciones. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en otros trabajos de estimación del área basimétrica en un determinado instante de tiempo (p. ej., Amateis *et al.*, 1995; Tomé *et al.*, 2001).

En todo caso, los modelos que mejores resultados de inicialización proporcionaron fueron los de Pienaar y Shiver (1986) y Pienaar *et al.*, (1990), con valores del coeficiente de determinación ajustado del 80,1% y el 78,1%, respectivamente. El comportamiento de estos dos modelos con respecto a la ecuación de proyección fue también aceptable, con unos valores respectivos del 90,3% y el 88,6% para el estadístico mencionado. Sin embargo, teniendo en cuenta que la ecuación que se considera más importante es la de proyección, y que además dos de los parámetros del modelo de Pienaar y Shiver (1986) resultaron no significativos, se escogieron los modelos de Bertalanffy-Richards (con el parámetro b_2 libre) y Korf (con el parámetro b_1 libre) para su análisis más detallado.

De este modo, se elaboraron gráficos de residuos frente a valores predichos calculados para las ecuaciones de inicialización (Figura 1) y proyección (Figura 2) de estos dos modelos. En ellos se aprecia que no existe ninguna tendencia sistemática de las observaciones, por lo que la transformación logarítmica de las ecuaciones utilizada en el ajuste parece corregir la posible heterocedasticidad. Por lo demás, los dos modelos pre-

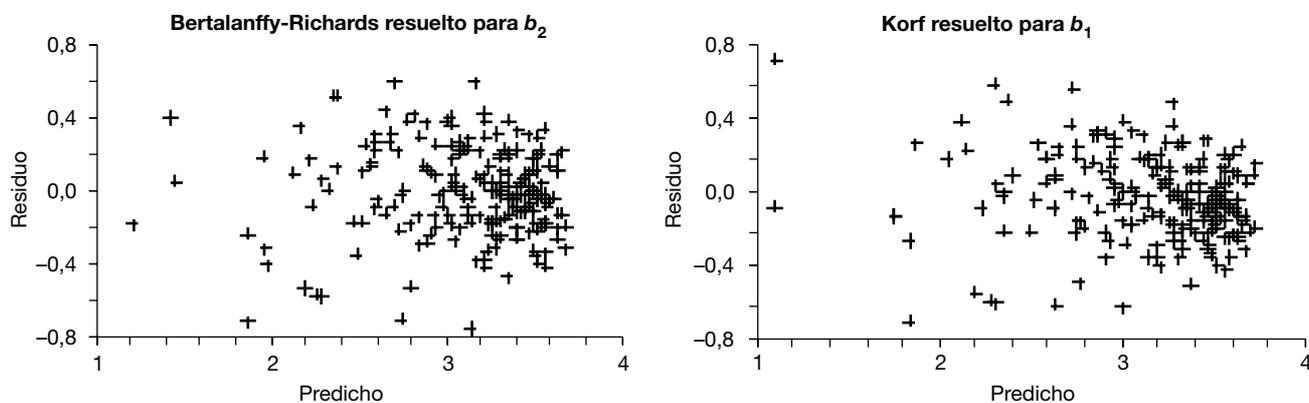


Figura 1. Gráficos de residuos frente a valores predichos para la ecuación de inicialización.

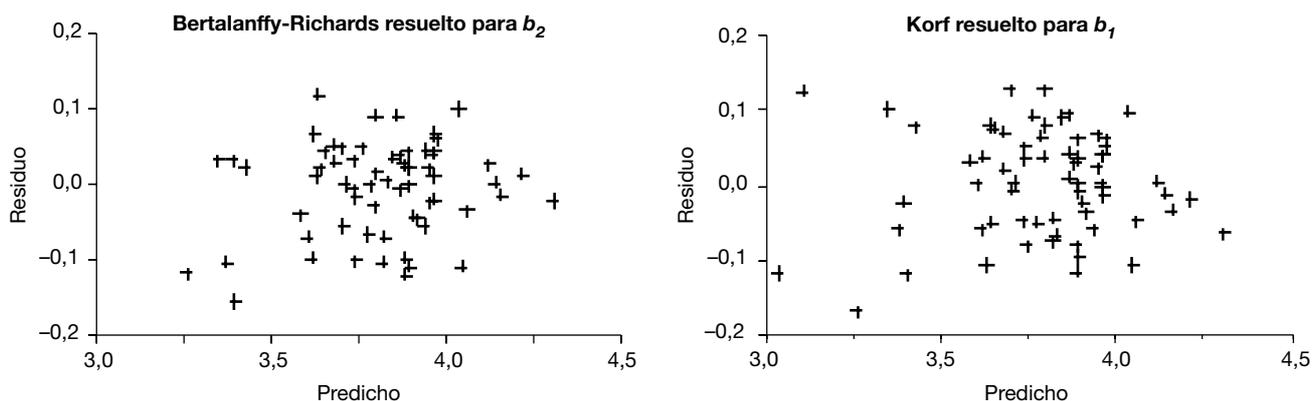


Figura 2. Gráficos de residuos frente a valores predichos para la ecuación de proyección.

dicen la variable dependiente de una manera muy similar, por lo que estos gráficos no son suficientes para decantarse por ninguno de ellos.

Teniendo en cuenta el significado biológico de los parámetros, en concreto el valor de la asíntota horizontal para edades avanzadas, que toma valores de $73,9 \text{ m}^2 \text{ ha}^{-1}$ y $92,4 \text{ m}^2 \text{ ha}^{-1}$ respectivamente para los modelos seleccionados de Bertalanffy-Richards y Korf, y considerando que en una parcela se observó un valor de área basimétrica de $74,2 \text{ m}^2 \text{ ha}^{-1}$, finalmente se optó por este último modelo y, por tanto, se proponen las siguientes modificaciones del modelo de Korf para inicializar y proyectar, respectivamente, el área basimétrica en masas no aclaradas de *Pinus sylvestris* procedentes de plantación en Galicia:

$$G = 92,40e^{-(1593/IS)t^{-1,369}} \quad [12]$$

$$G_2 = 92,40 \left(\frac{G_1}{92,40} \right)^{(t_1/t_2)^{1,369}} \quad [13]$$

donde G es el área basimétrica ($\text{m}^2 \text{ ha}^{-1}$) que se quiere predecir a la edad t cuando no se dispone de datos de un inventario, IS es el índice de sitio (m) estimado mediante la ecuación [2] para una edad de referencia de 40 años, G_2 es el área basimétrica ($\text{m}^2 \text{ ha}^{-1}$) a la edad t_2 de proyección, y G_1 es el área basimétrica ($\text{m}^2 \text{ ha}^{-1}$) a la edad t_1 , que debe obtenerse preferiblemente a partir de un inventario.

En la Figura 3 se representan las curvas de evolución con el tiempo del área basimétrica estimada para masas con índices de sitio de 9, 13, 18 y 25 m, superpuestas sobre las trayectorias de los valores observados en las parcelas medidas en dos ocasiones. En ella se aprecia que el área basimétrica de los pies vivos de dos parcelas disminuyó entre inventarios, debido al

elevado número de pies y a la avanzada edad de las masas, en las que la fuerte competencia entre los pies provocó una elevada mortalidad natural. Para el resto de parcelas las curvas generadas siguen razonablemente bien las trayectorias observadas.

Por último, dado que los datos a partir de los que se ha elaborado este estudio no incluyen el efecto de clara, parecería recomendable la utilización de las funciones obtenidas únicamente en masas no aclaradas. Teóricamente, cuando se realiza una clara en un rodal, sus características de crecimiento y su dinámica pueden cambiar; sin embargo, en algunos ensayos de claras realizados en masas regulares no se han observado diferencias en el crecimiento en área basimétrica por unidad de superficie entre masas aclaradas y no aclaradas de la misma edad, índice de sitio y área basimé-

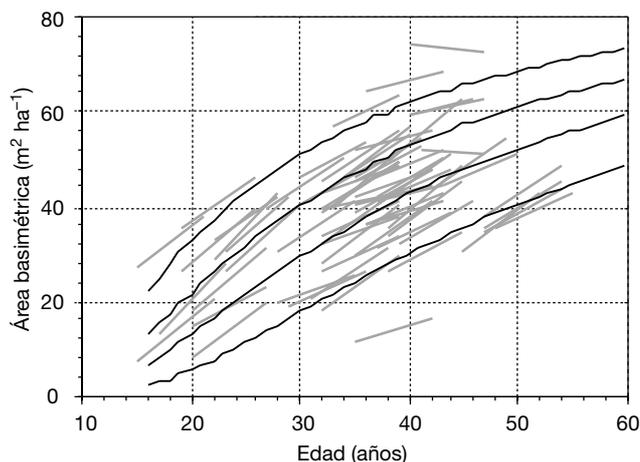


Figura 3. Curvas de evolución con el tiempo del área basimétrica para masas con índices de sitio de 9, 13, 18 y 25 m (de abajo a arriba, respectivamente), superpuestas sobre las trayectorias de los valores observados en las parcelas medidas en dos ocasiones.

trica (p. ej., Clutter y Jones, 1980; Cao *et al.*, 1982; Matney y Sullivan, 1982; Montero *et al.*, 2001). Por tanto, asumiendo esta hipótesis y a falta de datos de ensayos de claras que permitan corroborar el efecto de estos tratamientos en el crecimiento en área basimétrica, se sugiere también el empleo de las funciones ajustadas a masas aclaradas, siempre que se trate de claras por lo bajo y con un peso no demasiado fuerte.

Conclusiones

De los resultados del ajuste de los modelos de proyección de área basimétrica analizados se deduce que la inclusión de nuevas variables regresoras (altura dominante, índice de sito o número de pies por hectárea) en los modelos empíricos con la misma expresión matemática mejora las estimaciones de la ecuación, si bien puede llevar asociados problemas de multicolinealidad debidos a la sobreparametrización. Por otra parte, las ecuaciones derivadas de verdaderas funciones de crecimiento explican prácticamente la misma variabilidad que las ecuaciones empíricas considerando tan sólo el área basimétrica inicial y las edades inicial y final de proyección como variables explicativas.

Con respecto a las ecuaciones de inicialización, las estimaciones son, como era de esperar por ser un modelo estático y por la metodología empleada, más sesgadas y menos precisas que las de las ecuaciones de proyección. En determinados casos, la causa es la influencia de los valores estimados para los parámetros comunes en la ecuación de proyección, que afectan enormemente a la capacidad predictiva de la ecuación de inicialización. En estos casos es conveniente analizar el resultado obtenido en un ajuste simultáneo y plantearse la importancia relativa de cada ecuación (proyección e inicialización) dentro del modelo conjunto para decidir la metodología de ajuste más conveniente.

Finalmente, se recomienda el empleo de las ecuaciones derivadas del modelo de Korf resuelto para el parámetro b_1 , al presentar una asíntota más acorde con los datos observados en las masas muestreadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante el proyecto AGL2001-3871-C02-01 «Crecimiento y evolución de masas de pinar en Galicia».

Referencias bibliográficas

- ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., RODRÍGUEZ R., VEGA G., 1999. Elaboración de un modelo de crecimiento dinámico para rodales regulares de *Pinus pinaster* Ait. en Galicia. Invest Agr: Sist Recur For 8, 319-334.
- AMARO A., REED D.D., THEMIDO I., TOMÉ M., 1997a. Stand growth modelling for first rotation *Eucalyptus globulus* Labill. in Portugal. En: Amaro A., Tomé M. (eds.). Empirical and process-based models for forest tree and stand growth simulation. Oeiras (Portugal), 21-27 septiembre. Edições Salamandra, pp. 99-110.
- AMARO A., TOMÉ M., THEMIDO I., 1997b. ALBA, un modelo de crecimiento em área basal para povoamentos de eucalipto. En: Puertas F., Rivas M. (eds.). Actas del II Congreso Forestal Español-Irati 97, Pamplona, 23-27 septiembre. Mesa IV, Tomo IV, pp. 39-44.
- AMATEIS R.L., RADTKE P.J., BURKHART H.E., 1995. TAUYIELD: A stand-level growth and yield model for thinned and unthinned loblolly pine plantations. School of Forestry and Wildlife Resources, VPI & SU. Report no. 82.
- BENNETT F.A., 1970. Variable density yield tables for managed stands of natural slash pine. USDA Forest Service, Res Note SE-141.
- BERTALANFFY L.v., 1949. Problems of organic growth. Nature 163, 156-158.
- BERTALANFFY L.v., 1957. Quantitative laws in metabolism and growth. Quarterly Review of Biology 32, 217-231.
- BORDERS B.E., BAILEY R.L., 1986. A compatible system of growth and yield equations for slash pine fitted with restricted three-stage least squares. For Sci 32, 185-201.
- BRAVO F., 1998. Modelo de producción para *Pinus sylvestris* L. en el Alto Valle del Ebro. Tesis doctoral. Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias, Universidad de Valladolid, no publicada.
- BUCKMAN R., 1962. Growth and yield of red pine in Minnesota. USDA Forest Service, Tech Bull 1272.
- BURNHAM K.P., ANDERSON D.R., 1998. Model selection and inference: a practical information-theoretic approach. Springer-Verlag, New York.
- CAO Q.V., BURKHART H.E., LEMIN R.C., 1982. Diameter distributions and yields of thinned loblolly pine plantations. Va Polytech Inst State Univ Sch For Wildl Resour Publ FWS-1-82.
- CLUTTER J.L., 1963. Compatible growth and yield models for loblolly pine. For Sci 9, 354-371.
- CLUTTER J.L., JONES E.P., 1980. Prediction of growth after thinning in old-field slash pine plantations. USDA For Serv Res Pap SE-217.
- CLUTTER J.L., FORTSON J.C., PIENAAR L.V., BRISTER G.H., BAILEY R.L., 1983. Timber management: a quantitative approach. Krieger Publishing Company, New York. Reprint Ed. 1992.
- CLUTTER J.L., JONES E.P., 1980. Prediction of growth after thinning in old-field slash pine plantations. USDA Forest Service, Res Pap SE-217.
- DIÉGUEZ-ARANDA U., ÁLVAREZ-GONZÁLEZ J.G., BARRIO-ANTA M., ROJO-ALBORECA A., 2005. Site

- quality equations for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (north-western Spain). *Ann For Sci* 62, 143-152.
- DRAPER N.R., SMITH H., 1981. Applied regression analysis. John Wiley & Sons, New York.
- FORSS E., 1994. Das Wachstum der Baumart *Acacia mangium* in Südkalimantan, Indonesien. Magister Diss., Fac. of Forestry, University of Göttingen.
- GADOW K.v., REAL P., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., 2001. Modelización del crecimiento y la evolución de los bosques. IUFRO World Series vol. 12, Vienna.
- GARCÍA ABEJÓN J.L., 1981. Tablas de producción de densidad variable para *Pinus sylvestris* en el Sistema Ibérico. Comunicaciones INIA Serie: Recursos Naturales, nº 10.
- GARCÍA ABEJÓN J.L., GÓMEZ LORANCA J.A., 1984. Tablas de producción de densidad variable para *Pinus sylvestris* en el sistema Central. Comunicaciones INIA Serie: Recursos Naturales, nº 29.
- GARCÍA ABEJÓN J.L., TELLA G., 1986. Tablas de producción de densidad variable para *Pinus sylvestris* L. en el Sistema Pirenaico. Comunicaciones INIA Serie: Recursos Naturales, nº 43.
- GARCÍA O., 1988. Growth modelling – a (re)view. *N Z For* 33, 14-17.
- HARTLEY H.O., 1961. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares. *Technometrics* 3, 269-280.
- HUI G.Y., GADOW K.v., 1993. Zur Modellierung der Bestandesgrundflächentwicklung dargestellt am Beispiel der Baumart *Cunninghamia lanceolata*. *Allg Forst- u J-Ztg* 164, 144-145.
- KNOEBEL B.R., BURKHART H.E., BECK D.E., 1986. A growth and yield model for thinned stands of yellow-poplar. *For Sci Monograph* 27.
- KOZAK A., KOZAK R., 2003. Does cross validation provide additional information in the evaluation of regression models? *Can J For Res* 33, 976-987.
- LUNDQVIST B., 1957. On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden. *Medd Fran Statens Skogforsk.* Band 47, 1-64.
- MARTÍNEZ CHAMORRO E., ROJO A., RODRÍGUEZ SOALLEIRO R., 1997. Crecimiento y producción de repoblaciones de *Pinus sylvestris* L. en el Macizo Galaico. Primeros resultados. II Congreso Forestal Español, Mesa 4, 393-398.
- MATNEY T.G., SULLIVAN A.D., 1982. Compatible stand and stock tables for thinned and unthinned loblolly pine stands. *For Sci* 28, 161-171.
- MONTERO G., CAÑELLAS I., ORTEGA C., RÍO M. DEL, 2001. Results from a thinning experiment in Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) natural regeneration stand in the Sistema Ibérico Mountain Range (Spain). *For Ecol Manage* 145, 151-161.
- MURPHY P.A., FARRAR R.M., 1988. Basal area projection equations for thinned natural even-aged forest stands. *Can J For Res* 18, 827-832.
- MYERS R.H., 1990. Classical and modern regression with applications. 2nd edition. Duxbury Press, Belmont, California.
- OLIVER C.D., LARSON B.C., 1996. Forest Stand Dynamics. John Wiley & Sons, New York.
- PALAHÍ M., MIINA J., TOMÉ M., MONTERO G., 2002. Stand-level yield model for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in north-east Spain. *Invest Agr: Sist Recur For* 11, 409-424.
- PALAHÍ M., PUKKALA T., MIINA J., MONTERO G., 2003. Individual-tree growth and mortality models for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in north-east Spain. *Ann For Sci* 60, 1-10.
- PIENAAR L.V., HARRISON W.M., 1988. A stand table projection approach to yield prediction in unthinned even-aged stands. *For Sci* 34, 804-808.
- PIENAAR L.V., SHIVER B.D., 1986. Basal area prediction and projection equations for pine plantations. *For Sci* 32, 626-633.
- PIENAAR L.V., PAGE H., RHENEY J.W., 1990. Yield prediction for mechanically site-prepared slash pine plantations. *South J Appl For* 14, 104-109.
- RICHARDS F.J., 1959. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10, 290-300.
- RÍO M. DEL, 1999. Régimen de claras y modelo de producción para *Pinus sylvestris* L. en los Sistemas Central e Ibérico. Tesis Doctorales INIA nº 2, Serie Forestal.
- RÍO M. DEL, MONTERO G., 2001. Modelo de simulación de claras en masas de *Pinus sylvestris* L. Monografías INIA: forestal nº 3.
- ROCKWOOD D.L., YANG B., OUTCALT K.W., 1997. Stand-yield prediction for managed Ocala sand pine. USDA Forest Service, Res Pap SRS-3.
- ROJO A., MONTERO G., 1996. El pino silvestre en la Sierra de Guadarrama. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, Madrid.
- SAS INSTITUTE INC., 2004. SAS/STAT® 9.1 User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc.
- SOUTER R.A., 1986. Dynamic stand structure in thinned stands of naturally regenerated loblolly pine in the Georgia Piedmont. Ph. D. Thesis. University of Georgia. Athens, GA.
- TOMÉ M., RIBEIRO F., SOARES P., 2001. O modelo Globulus 2.1. Relatorios Técnico-científicos do GIMREF, nº1/2001. Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior de Agronomia, Departamento de Engenharia Florestal.
- VAN LAAR A., AKÇA A., 1997. Forest Mensuration. Cuvillier Verlag, Göttingen.
- WOOLLONS R.C., HAYWARD W.J., 1985. Revision of a growth and yield model for radiata pine in New Zealand. *For Ecol Manage* 11, 191-202.
- XUNTA DE GALICIA, 2001. O monte galego en cifras. Dirección Xeral de Montes e Medio Ambiente Natural, Consellería de Medio Ambiente.
- ZARNOCH S.J., FEDUCCIA D.P., BALDWIN V.C., DELL T.R., 1991. Growth and yield predictions for thinned and unthinned slash pine plantations on cutover sites in the West Gulf region. USDA Forest Service, Res Pap SO-264.