

Relación altura-diámetro generalizada para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de repoblación en el noroeste de España

U. Diéguez-Aranda^{1*}, M. Barrio Anta¹, F. Castedo Dorado²
y J. G. Álvarez González¹

¹ Departamento de Ingeniería Agroforestal. Universidad de Santiago de Compostela.
Escuela Politécnica Superior. Campus Universitario. 27002 Lugo. España

² Departamento de Ingeniería Agraria. Universidad de León. Escuela Superior y Técnica de Ingeniería Agraria.
Avda. de Astorga. 24400 Ponferrada. España

Resumen

Se ha desarrollado una relación altura-diámetro para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de plantación en Galicia (noroeste de España) que considera el diámetro normal y variables de masa como predictoras. El conjunto de datos utilizado procede de las mediciones efectuadas en 155 parcelas que se localizaron en masas poco o nada aclaradas de la especie en la zona de estudio (de las que 68 se inventariaron en dos ocasiones), en las que se tomaron datos del diámetro normal en todos los árboles y una muestra de 7.602 alturas totales. Se evaluaron nueve modelos altura-diámetro compatibles, es decir, que predicen la altura dominante cuando se introduce como diámetro normal el diámetro dominante de la masa, con el objetivo de incluir el mejor de ellos en un modelo dinámico de crecimiento de la especie en estudio. Basándose en análisis numéricos y gráficos, se propone una modificación del modelo de Gaffrey (1988) que considera el diámetro normal, el diámetro dominante y la altura dominante como variables independientes. Este modelo explicó el 94% de la variabilidad total de los datos de altura empleados, tanto en la fase de ajuste como en la de validación cruzada por parcela. Finalmente, debido a que los árboles de una masa con el mismo diámetro generalmente no tienen la misma altura, se añadió una componente estocástica al modelo determinístico. Esta aproximación permite imitar la variabilidad natural de la distribución de alturas, proporcionando predicciones más realistas.

Palabras clave: predicción de altura, compatibilidad, componente estocástica, Galicia.

Abstract

Generalized height-diameter relationship for *Pinus sylvestris* plantations in North-western Spain

A height-diameter relationship for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (northwestern Spain) was developed using the breast height diameter and some stand characteristics as regressors. The data used were obtained from 155 sample plots located in unthinned stands, or stands thinned lightly from below, throughout the study area; 68 of the sample plots were measured twice. Nine different compatible height-diameter equations, which estimate the dominant height when the diameter at breast height is equal to dominant diameter, were evaluated for inclusion in a dynamic stand growth model for the species. Selection of the best equation was based on both numerical and graphical analyses of the residuals. The data were best described by a modified version of the equation of Gaffrey (1988), which includes the diameter at breast height, the dominant diameter and the dominant height as regressors. This model explained 94% of the total variability of the data used in both the fitting and the cross-validation phases. As two trees within the same stand and that have the same diameter are not necessarily of the same height, a stochastic component was added to the deterministic height-diameter relationship. By using this approach, more realistic height predictions were obtained from diameter classes.

Key words: height prediction, compatibility, stochastic component, Galicia.

* Autor para la correspondencia: udieguez@lugo.usc.es

Recibido: 18-11-04; Aceptado: 16-06-05.

Introducción

La información sobre la relación altura-diámetro de los árboles integrados en masas forestales se utiliza principalmente para caracterizar la estructura de la masa, para estimar el volumen de los árboles individuales o de la masa, y para determinar la altura dominante con el propósito de evaluar la calidad de la estación (Huang *et al.*, 1992; Lappi, 1997; Lei y Parresol, 2001). La estimación precisa de esta relación es importante debido a que la altura es una variable más difícil y costosa de medir en campo que el diámetro, y generalmente se mide sólo en una muestra de árboles.

Las ecuaciones altura-diámetro son también una parte importante de los modelos de clases de tamaño (Gadow *et al.*, 2001); así, la aplicación combinada de una función de desagregación en clases diamétricas, una relación altura-diámetro y una función de perfil o una tarifa de volumen de razón, permite obtener una estimación cuantitativa de la producción de una masa según destinos industriales, y realizar un análisis económico preciso en el que se consideran los valores de los distintos productos (Davis *et al.*, 2001). Ejemplos de modelos de masa que emplean relaciones altura-diámetro para predecir la altura media de un diámetro dado o de una clase diamétrica son los de Lenhart y Clutter (1971), Woollons y Hayward (1985), Páscoa (1987) o Zarnoch *et al.* (1991).

Para ajustar la relación entre los diámetros y las alturas en una masa forestal se han empleado numerosas funciones, tanto lineales como no lineales. Una completa recopilación de las mismas se puede encontrar en los trabajos de Huang *et al.* (1992), Fang y Bailey (1998) o Peng (1999). Sin embargo, la heterogeneidad de condiciones estacionales y el diferente estado selvícola de las masas provocan que una única ecuación altura-diámetro no se ajuste bien a todas las situaciones, por lo que dicha relación debería establecerse de forma individual para cada rodal y rango de edades. El inconveniente de esta aproximación es que requiere gran cantidad de datos y resulta, por tanto, muy costosa (Schröder y Álvarez González, 2001). Una alternativa práctica es emplear una relación altura-diámetro generalizada en la que, para predecir la altura de cada árbol, se utilice su diámetro normal y una o más variables independientes de masa (altura media o dominante, diámetro medio cuadrático, diámetro dominante, número de pies, área basimétrica, edad, etc.), que tengan en cuenta ciertas características básicas inherentes a todas las regresiones de altura locales que represen-

tan a cada parcela o rodal individual (Gadow *et al.*, 2001). Generalmente, estas variables de masa se seleccionan de manera que no representen costos adicionales excesivamente importantes en la toma de datos.

El objetivo de este trabajo es desarrollar una ecuación que describa de manera satisfactoria la relación altura-diámetro para masas puras y regulares de *Pinus sylvestris* L. en Galicia (noroeste de España), para su empleo como parte de un modelo de crecimiento de esta especie en la zona de estudio. Además, para simular de una manera más real la distribución de alturas para cada diámetro dentro de una masa homogénea, se ha añadido una componente estocástica al modelo determinístico.

Material y Métodos

Datos

Los datos utilizados en este trabajo proceden de una red de 155 parcelas que la Unidad de Gestión Forestal Sostenible de la Universidad de Santiago de Compostela estableció entre 1996 y 1997 para elaborar modelos forestales de crecimiento. Dicha red de parcelas está distribuida por las zonas en las que *Pinus sylvestris* está presente en Galicia, y trata de cubrir las diferentes edades, densidades y calidades de estación existentes en masas puras y regulares de este pino procedentes de plantación. El tamaño de parcela osciló entre 625 m² y 1.200 m², dependiendo de la densidad de la masa, para obtener un mínimo de 60 árboles en cada parcela. En cada localización se tomaron datos de edad y diferentes factores relacionados con la fisiografía, la vegetación y el estado fitosanitario de la masa. Además, se etiquetaron con una chapa numerada todos los árboles de cada parcela y en ellos se realizaron dos mediciones perpendiculares del diámetro normal (a 1,3 m sobre el nivel del suelo), utilizando una forcípula con graduación milimétrica. Asimismo, se midió con hipsómetro la altura total de 30 árboles elegidos aleatoriamente en cada parcela, y de la proporción, en función de la superficie de la misma, de los 100 pies más gruesos por hectárea con aspecto de dominantes. Se anotaron también variables descriptivas de cada árbol, por ejemplo si estaban vivos o muertos, o si presentaban alguna deformación y de qué tipo.

En el invierno de 2003 se remidieron 79 de las 155 parcelas instaladas inicialmente. Estas parcelas se seleccionaron para desarrollar un modelo dinámico de

crecimiento para la especie en el área de estudio, por lo que el número inicial de parcelas instaladas en 1996-1997 se redujo considerablemente debido a que las parcelas medidas en dos ocasiones proporcionan una mejor información sobre el desarrollo de las masas forestales. De entre ellas, fueron excluidas de la base de datos utilizada en el presente estudio las sometidas a algún tratamiento selvícola de clara del que no se obtuvo información sobre la manera en que fue ejecutado. Tras una comprobación de errores y el análisis de las parcelas instaladas en condiciones extremas, el número definitivo de parcelas empleadas en este trabajo se redujo a 155 del primer inventario y a 68 del segundo.

Para cada inventario y parcela seleccionada se calcularon las siguientes variables de masa: edad, número de pies por hectárea, área basimétrica, diámetro medio cuadrático, diámetro medio dominante (definido como el diámetro medio de los 100 árboles más gruesos por hectárea), altura media (calculada como la altura media de los árboles elegidos aleatoriamente en los que se midió la altura), altura dominante (definida como la altura media de los 100 árboles más gruesos por hectárea) e índice de sitio. Esta variable se calculó utilizando el siguiente modelo para masas de *Pinus sylvestris* en Galicia (Diéguez-Aranda *et al.*, 2005):

$$IS = \frac{51,39}{1 - \left(1 - \frac{51,39}{H_{01}}\right) \left(\frac{t_1}{t_{ref}}\right)^{1,277}} \quad [1]$$

donde H_0 es la altura dominante en metros a la edad t , e IS es el índice de sitio en metros a la edad de referencia t_{ref} de 40 años.

En la Tabla 1 se muestran los resultados del análisis exploratorio de las principales variables de masa de los 223 inventarios seleccionados y de los 7.602 árboles en los que se midió el diámetro normal y la altura total.

VARIABLES DE MASA Y MODELOS ANALIZADOS

Se han empleado numerosas ecuaciones para describir la relación altura-diámetro considerando diferentes variables de masa como independientes. Una completa recopilación actualizada de las mismas se puede encontrar en los trabajos de Soares y Tomé (2002) y López Sánchez *et al.* (2003).

Cuando se pretende establecer una relación de este tipo, generalmente es necesario incluir alguna altura de masa para obtener estimaciones precisas e insesgadas de las alturas de los árboles individuales (Gaffrey, 1988; Hui y Gadow, 1993; Sloboda *et al.*, 1993; Nilson, 1999; López Sánchez *et al.*, 2003). En este sentido, la altura media es una variable que requiere un importante esfuerzo de muestreo, pudiendo limitar por tanto la aplicación futura de los modelos que la incluyen (López Sánchez *et al.*, 2003). Por su parte, la altura dominante requiere únicamente la medición de alturas en los árboles dominantes y, al contrario que la anterior, es relativamente independiente de los tratamientos selvícolas realizados en las masas forestales. Por tal motivo, se ha considerado la altura dominante como variable independiente representativa de la altura de masa.

Además de una altura, también suele ser necesario incluir alguna variable que tenga en cuenta implícita o explícitamente la densidad de la masa, como el número de pies, el área basimétrica o algún tipo de diámetro medio o dominante (Sloboda *et al.*, 1993; Mønness, 1982; Páscoa, 1987; Cañadas *et al.*, 1999). Entre estas variables, las empleadas con mayor frecuencia son el diámetro medio cuadrático y el diámetro dominante. No obstante, en ocasiones también es interesante considerar el número de pies o el área basimétrica, debido a que masas con igual diámetro medio cuadrático o dominante pueden diferir en el valor de dichas variables (Schröder y Álvarez González, 2001).

Adicionalmente, a veces también se incluyen la edad de la masa o el índice de sitio como variables predicto-

Tabla 1. Resumen de datos de las parcelas y los árboles utilizados para ajustar la relación altura diámetro generalizada

Estadístico	t	N	G	d_g	d_0	H_m	H_0	IS	d	h
Media	34,8	1.376	37,4	18,7	26,3	11,6	13,1	15,3	19,5	11,7
Máximo	55,0	2.720	74,2	30,9	40,1	22,7	24,0	24,1	60,0	27,3
Mínimo	12,0	580	4,2	7,5	10,4	3,4	4,0	7,0	1,1	1,6
Desv. estándar.	8,4	410	14,3	4,8	5,9	4,3	4,5	3,7	7,3	4,6

t : edad (años). N : número de pies vivos por hectárea. G : área basimétrica ($m^2 ha^{-1}$). d_g : diámetro medio cuadrático (cm). d_0 : diámetro medio de los árboles dominantes (cm). H_m : altura media (m). H_0 : altura dominante (m). IS : índice de sitio (m, $t_{ref}=40$ años). d : diámetro normal (cm). h : altura total (m).

ras en la relación altura-diámetro generalizada (Curtis, 1967; Bennet y Clutter, 1968; Lenhart, 1968; Tomé, 1988; Amateis *et al.*, 1995). La inclusión de estas variables generalmente no supone un esfuerzo adicional de muestreo cuando se trabaja con masas regulares procedentes de repoblación, ya que en ellas es habitual disponer de la fecha de plantación o es posible estimarla fácilmente, y el índice de sitio puede determinarse a partir de un sistema de curvas de calidad de estación.

La relación altura-diámetro generalizada se utilizará principalmente como parte de un modelo dinámico para *Pinus sylvestris* en la zona de estudio. Para ello, una vez proyectadas en un instante determinado la altura dominante, el número de pies de la masa y el área basimétrica mediante funciones explícitas de crecimiento de estas variables, se utilizará una función de desagregación en clases diamétricas, la relación altura-diámetro generalizada y una tarifa de cubicación con clasificación de productos para obtener una estimación cuantitativa de la producción de la masa según destinos industriales. Por tal motivo, se ha considerado prioritario que las estimaciones de la altura dominante obtenidas mediante la relación altura-diámetro generalizada coincidan con dicha altura cuando se introduce como diámetro normal el valor del diámetro dominante de la masa. Esto ha restringido los posibles modelos a utilizar (Tabla 2). La modificación de las ecuaciones de Gaffrey (1988) y Nilson (1999) se debe a que se ha utilizado el diámetro dominante en vez del diámetro medio cuadrático propuesto como variable independiente en los modelos originales.

Ajuste y selección de los modelos

La mayoría de los modelos descritos son intrínsecamente no lineales, por lo que la estimación de los parámetros requiere el empleo de un procedimiento iterativo (Draper y Smith, 1998). En este trabajo se utilizó el algoritmo de Gauss-Newton (Hartley, 1961), que está implementado en el procedimiento MODEL del paquete estadístico SAS/ETS® (SAS Institute Inc., 2004a). Los valores iniciales para comenzar el procedimiento de estimación se tomaron de los resultados obtenidos por otros autores en estudios similares (Cañadas *et al.*, 1999; Soares y Tomé, 2002; López Sánchez *et al.*, 2003). En los modelos modificados en los que esto no fue posible, se probaron diferentes valores iniciales obtenidos de los trabajos originales (Gaffrey, 1988; Nilson, 1999) para asegurar que la conver-

Tabla 2. Módulos altura-diámetro generalizados analizados

Autor	Modelo
M1 (Mønness, 1982)	$h = 1,3 + \left(b_0 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right) + \left(\frac{1}{H_0 - 1,3} \right) \right)^{1/3}^{-3}$
M2 (Gaffrey, 1988 modif.)	$h = 1,3 + (H_0 - 1,3) e^{b_0 \left(1 - \frac{d_0}{d} \right) + b_1 \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right)}$
M3 (Tomé, 1988)	$h = H_0 e^{\left(b_0 + b_1 H_0 + b_2 \frac{N}{1000} + b_3 t \right) \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right)}$
M4 (Tomé, 1988)	$h = H_0 e^{(b_0 + b_1 H_0 + b_2 d_g + b_3 t) \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right)}$
M5 (Cañadas <i>et al.</i> , 1999)	$h = 1,3 + (H_0 - 1,3) \left(\frac{d}{d_0} \right)^{b_0}$
M6 (Cañadas <i>et al.</i> , 1999)	$h = 1,3 + \frac{d}{\frac{d_0}{H_0 - 1,3} + b_0 (d_0 - d)}$
M7 (Cañadas <i>et al.</i> , 1999)	$h = 1,3 + (H_0 - 1,3) \frac{1 - e^{b_0 d}}{1 - e^{b_0 d_0}}$
M8 (Cañadas <i>et al.</i> , 1999)	$h = 1,3 + \left(b_0 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right) + \left(\frac{1}{H_0 - 1,3} \right) \right)^{1/2}^{-2}$
M9 (Nilson, 1999 modif.)	$h = \frac{H_0}{1 - b_0 \left(1 - \left(\frac{d_0}{d} \right)^{b_1} \right)}$

b_i : parámetros a estimar. El resto de variables se han descrito en la Tabla 1.

gencia obtenida fuese global y no correspondiese a un óptimo local.

La presencia de multicolinealidad entre variables en cada uno de los modelos se evaluó en función del índice de condición máximo (*ICm*), que se define como la raíz cuadrada del cociente entre los autovalores mayor y menor de la matriz de correlaciones de las variables independientes. Belsey (1991) indica que cuando el valor de dicho índice se encuentra entre 5 y 10 no existen problemas de multicolinealidad, si está entre 30 y 100 hay problemas de multicolinealidad, y si es superior a 1.000 estos problemas se consideran serios. Por su parte, Myers (1990) indica que si el índice de condición máximo es superior a $\sqrt{1.000}$ se ne-

cesario tener cuidado debido a los posibles efectos de la multicolinealidad.

El análisis de la capacidad de ajuste de los modelos se basó en comparaciones numéricas y gráficas. Se calcularon, a partir de los residuos obtenidos en la fase de ajuste, los siguientes estadísticos: el sesgo (\bar{E}), que evalúa las desviaciones sistemáticas del modelo respecto a los valores observados; el error medio cuadrático (EMC), que analiza la precisión de las estimaciones; el coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}), que refleja la proporción de la variabilidad total que es explicada por el modelo teniendo en cuenta el número total de parámetros a estimar; y el criterio de información de Akaike en diferencias ($AICd$), que es un índice que se emplea para seleccionar el mejor modelo y se basa en minimizar la distancia de Kullback-Lieber (Burnham y Anderson, 1998). Las expresiones de estos estadísticos son las siguientes:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad [2]$$

$$EMC = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p} \quad [3]$$

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad [4]$$

$$AICd = n \log \hat{\sigma}^2 + 2k - \min(n \log \hat{\sigma}^2 + 2k) \quad [5]$$

donde y_i , \hat{y}_i , e \bar{y} son, respectivamente, los valores observado, predicho y promedio de la variable dependiente; n es el número total de observaciones utilizado para ajustar el modelo; p es el número de parámetros a estimar; $k = p + 1$; y $\hat{\sigma}^2$ es el estimador de la varianza del error del modelo obtenido como:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad [6]$$

A falta de un conjunto independiente de datos para realizar la validación de los diferentes modelos seleccionados se empleó la técnica denominada validación cruzada. Ésta se realizó a nivel de parcela (y no a nivel de árbol) para garantizar que todos los árboles de una misma parcela estuvieran en el mismo subconjunto

de datos e intentar así incrementar la «independencia» entre los distintos subconjuntos (Soares y Tomé, 2002). Por tanto, los residuos de cada árbol en una parcela determinada se obtuvieron reajustando el modelo sin las observaciones de esa parcela. En sentido estricto, sin embargo, la validación de un modelo sólo se puede realizar mediante su empleo a lo largo del tiempo, por lo que esta metodología es en realidad un criterio más de decisión para la selección del modelo más adecuado (Kozak y Kozak, 2003).

A partir de los residuos obtenidos en la fase de validación cruzada se calcularon el sesgo, el error medio cuadrático, la eficiencia del modelo ajustada (EM_{adj} , equivalente al R^2_{adj} de la fase anterior) y el criterio de información de Akaike en diferencias.

Además de los estadísticos descritos, una de las maneras más eficientes de evaluar la capacidad de ajuste de un modelo es la inspección visual, por lo que se analizaron los gráficos de residuos frente a valores predichos de la variable altura total. Estos gráficos son útiles tanto para detectar posibles tendencias sistemáticas de los datos como para seleccionar factores de ponderación si fuesen necesarios debido a la presencia de heterocedasticidad (Neter *et al.*, 1996).

Para evaluar si los residuos obtenidos en cada modelo seguían una distribución normal, y por tanto si las estimaciones de los parámetros eran válidas, se elaboraron gráficos PP en los que se representaron gráficamente los pares:

$$\{F_n(x_i); F(x_i)\}, i = 1, 2, \dots, n$$

donde $F_n(x_i)$ es la frecuencia relativa acumulada de los residuos (distribución empírica) y $F(x_i)$ es la distribución teórica (en este caso la distribución normal). Cuanto más se acerque esta nube de puntos a la diagonal $y = x$, mayor seguridad se tendrá de que la distribución teórica (normal) está bien ajustada.

Por último, para examinar más a fondo el comportamiento de los modelos que mejores resultados proporcionaron en base a los estadísticos y gráficos descritos anteriormente, se calcularon y representaron gráficamente el sesgo y la raíz del error medio cuadrático por clases diamétricas, utilizando para ello los resultados obtenidos en la fase de ajuste.

Estimación estocástica de la altura

Generalmente dos árboles con el mismo diámetro dentro de una misma masa o parcela no tienen la mis-

ma altura, por lo que, para simular la variabilidad natural de las alturas reales observadas, es necesario añadir a los modelos determinísticos analizados una componente estocástica basada en una determinada función de distribución de probabilidad (Parresol y Lloyd, 2004).

De acuerdo con Judge *et al.* (1988), la expresión general de un modelo se puede escribir como:

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_i \quad [7]$$

donde \mathbf{x}_i es un vector (de dimensión $N \times 1$) de las variables independientes de árbol y de masa empleadas, $\boldsymbol{\beta}$ es un vector (de dimensión $p \times 1$) desconocido de los parámetros, y_i es la variable dependiente (altura total del árbol en nuestro caso) cuya media es función de \mathbf{x}_i y $\boldsymbol{\beta}$, ε_i es el error aleatorio, e i representa la observación i -ésima ($i = 1, 2, \dots, n$).

Utilizando notación matricial, el estimador de mínimos cuadrados del vector $\boldsymbol{\beta}$ de parámetros desconocidos en un modelo lineal es \mathbf{b} , y se obtiene como:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad [8]$$

En estimación no lineal, la matriz \mathbf{X} se reemplaza por la matriz de derivadas parciales con respecto a cada parámetro $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta})$, definida como:

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p} \end{bmatrix} \quad [9]$$

El estimador no lineal de mínimos cuadrados del vector $\boldsymbol{\beta}$ es el valor que minimiza la suma de cuadrados de los residuos:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \varepsilon'\varepsilon = [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})]' [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})] \quad [10]$$

En condiciones apropiadas, el estimador de mínimos cuadrados \mathbf{b} se distribuirá aproximadamente siguiendo una normal, con media $\boldsymbol{\beta}$ y matriz de varianzas-covarianzas consistentemente estimada por:

$$s^2(\mathbf{b}) = EMC [\mathbf{Z}(\mathbf{b})' \mathbf{Z}(\mathbf{b})]^{-1} \quad [11]$$

donde el escalar EMC es el error medio cuadrático de la regresión, es decir, la ecuación [10] dividida por los grados de libertad:

$$EMC = \frac{S(\mathbf{b})}{n-p} = \frac{[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{b})]' [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{b})]}{n-p} \quad [12]$$

Esta información se puede utilizar para formular los contrastes de hipótesis y los intervalos de confianza aproximados de \mathbf{b} de manera similar a como se hace en mínimos cuadrados para modelos lineales. Para establecer el intervalo de confianza de la media estimada \hat{y}_i para cada valor de la variable explicativa, el estimador de la varianza es:

$$\text{var}(\hat{y}_i) = \mathbf{z}(\mathbf{b})'_i s^2(\mathbf{b}) \mathbf{z}(\mathbf{b})_i \quad [13]$$

donde $\mathbf{z}(\mathbf{b})'_i$ es la i -ésima fila de $\mathbf{Z}(\mathbf{b})$ (ver ecuación [9]). Para calcular el intervalo de predicción para una nueva observación individual obtenida de la distribución de \hat{y}_i , la varianza se determina como:

$$\text{var}(\hat{y}_{i(\text{nuevo})}) = EMC + \mathbf{z}(\mathbf{b})'_i s^2(\mathbf{b}) \mathbf{z}(\mathbf{b})_i \quad [14]$$

Por tanto, el intervalo de predicción para una observación individual se calcula como (Judge *et al.*, 1988; Myers, 1990; Ryan, 1996; Peña, 2002):

$$\hat{y}_i \pm t_{\alpha/2, n-p} s_{\hat{y}_{i(\text{nuevo})}} \quad [15]$$

donde $s_{\hat{y}_i}$ es el error estándar de la predicción para una nueva observación, obtenido a partir de [14] como:

$$\begin{aligned} s_{\hat{y}_{i(\text{nuevo})}} &= \sqrt{\text{var}(\hat{y}_{i(\text{nuevo})})} = \\ &= \sqrt{EMC + \mathbf{z}(\mathbf{b})'_i s^2(\mathbf{b}) \mathbf{z}(\mathbf{b})_i} \end{aligned} \quad [16]$$

La estimación estocástica propuesta utiliza este error estándar de forma similar a la empleada para la construcción del intervalo de predicción en un modelo de regresión. La diferencia radica en que, en vez de usar el valor correspondiente a un límite fijo, por ejemplo $-1,96$ y $1,96$ respectivamente para una probabilidad del 2,5% y el 97,5% e infinitos grados de libertad, el valor de t se sustituye por el obtenido aleatoriamente a partir de la inversa de la función de distribución normal. Por tanto, la expresión utilizada para asignar las alturas estocásticamente a cada árbol de la muestra es:

$$\hat{y}_{i(\text{estoc})} = \hat{y}_i + F_U^{-1} s_{\hat{y}_{i(\text{nuevo})}} \quad [17]$$

donde $\hat{y}_{i(\text{estoc})}$ es la estimación estocástica de la altura, \hat{y}_i es la estimación determinística (obtenida mediante el modelo ajustado sin considerar la componente estocástica), F_U^{-1} es el valor de la inversa de la función de distribución normal estándar para la variable aleatoria U generada uniformemente en el intervalo $(0, 1)$, y $s_{\hat{y}_{i(\text{nuevo})}}$ es el error estándar de la predicción para un nuevo individuo.

La validez de la aproximación estocástica se analizó por grupos de igual rango para las variables explicativas de masa incluidas en el modelo. Con ello se pretendió reducir la variabilidad debida a la existencia de diferentes relaciones altura-diámetro locales para cada parcela, permitiendo estudiar la variabilidad real de las alturas por clases diamétricas en condiciones de masa más homogéneas.

Resultados y Discusión

En la Tabla 3 se muestran las estimaciones de los parámetros y los errores estándar aproximados obtenidos para cada modelo mediante el procedimiento de regresión no lineal descrito. A partir de ellos se calculó el valor aproximado del estadístico t de Student y su valor de probabilidad asociado. El parámetro b_0 del modelo M2 no resultó significativamente distinto de cero a un nivel del 5%; lo mismo sucedió con el parámetro b_2 del modelo M4, que acompaña al diámetro medio cuadrático, y con el parámetro b_3 de los modelos M3 y M4, que acompaña en ambos casos a la variable edad. En ningún caso el índice de condición máximo superó el valor de 22, por lo que, según las recomendaciones de Belsey (1991) y Myers (1990), se

descartó la presencia de multicolinealidad y se consideraron válidos los errores estándar aproximados asociados a las estimaciones de los parámetros según este criterio.

Los modelos con parámetros no significativos a un nivel del 5% se ajustaron nuevamente sin incluir los términos que acompañan a dichos parámetros. Los resultados de estos nuevos ajustes se muestran en la Tabla 4.

A partir de los resultados de los ajustes se deduce que el diámetro normal de un árbol, junto con el diámetro medio y la altura media de los árboles dominantes (d_0 y H_0 , respectivamente) de la masa en la que se asienta, son suficientes para explicar la mayor parte de la variabilidad de los datos de altura total empleados.

En la Tabla 5 se exponen los estadísticos de comparación, tanto para la fase de ajuste como para la de validación cruzada, obtenidos tras el ajuste de los modelos analizados. A la vista de los mismos se observa que el modelo M2 (Gaffrey, 1988 modif.) ajustado sin incluir la variable que acompaña al parámetro b_0 , es el que presenta mejores resultados en ambas fases para los estadísticos error medio cuadrático, coeficiente de determinación ajustado y criterio de información de Akaike en diferencias. A continuación se

Tabla 3. Valores de los parámetros, errores estándar asintóticos y contrastes de significación aproximados de los parámetros para los modelos analizados

Modelo	Parámetro	Estimación	Error estándar aproximado	t -valor aproximado	Prob. > $ t $
M1	b_0	1,069	0,0097	110,2	< 0,001
M2	b_0	-0,00138	0,0121	-0,1	0,909
	b_1	7,235	0,3388	21,4	< 0,001
M3	b_0	-6,910	0,3586	-19,3	< 0,001
	b_1	-0,0851	0,0160	-5,3	< 0,001
	b_2	0,9937	0,1337	7,4	< 0,001
	b_3	0,00972	0,0093	1,0	0,297
M4	b_0	-4,967	0,2949	-16,8	< 0,001
	b_1	-0,0728	0,0251	-2,9	0,004
	b_2	-0,0371	0,0246	-1,5	0,133
	b_3	0,0112	0,0095	1,2	0,240
M5	b_0	0,3666	0,0032	112,8	< 0,001
M6	b_0	-0,0439	0,0002	-218,4	< 0,001
M7	b_0	0,0838	0,0007	124,0	< 0,001
M8	b_0	1,059	0,0099	106,9	< 0,001
M9	b_0	0,2254	0,0149	15,1	< 0,001
	b_1	1,1094	0,0509	21,8	< 0,001

Tabla 4. Valores de los parámetros, errores estándar asintóticos y contrastes de significación aproximados obtenidos al reajustar los modelos sin incluir los parámetros que resultaron no significativos en el primer ajuste

Modelo	Parámetro	Estimación	Error estándar aproximado	t-valor aproximado	Prob. > t
M2 (sin b_0)	b_0	7,197	0,062	115,5	< 0,001
M3 (sin b_3)	b_0	-6,692	0,297	-22,5	< 0,001
	b_1	-0,0755	0,0128	-5,9	< 0,001
	b_2	0,9899	0,1336	7,4	< 0,001
M4 (sin b_2 ni b_3)	b_0	-4,981	0,184	-27,0	< 0,001
	b_1	-0,0932	0,0126	-7,4	< 0,001

Tabla 5. Valores de los estadísticos de comparación de los modelos analizados

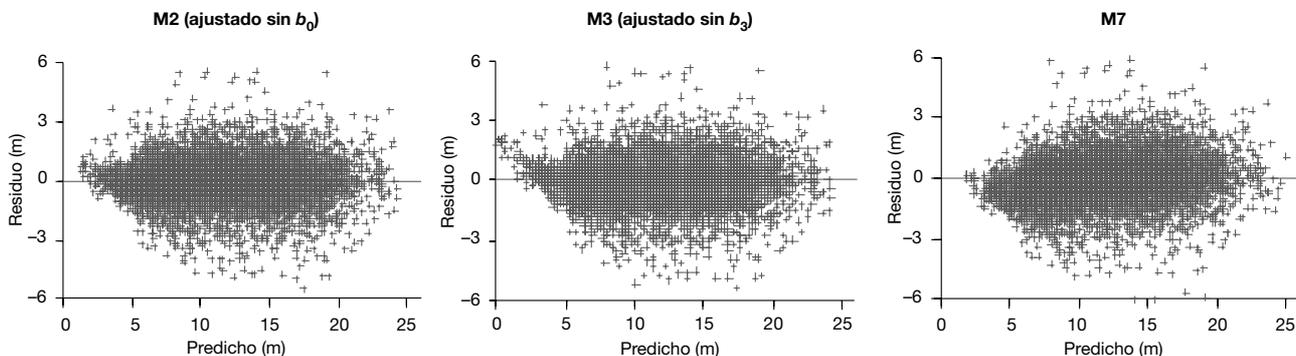
Modelo	Ajuste				Validación			
	\bar{E}	EMC	R^2_{ajd}	AICd	\bar{E}	EMC	EM_{adj}	AICd
M1	-0,062	1,347	0,9372	157	-0,062	1,349	0,9371	157
M2 (sin b_0)	-0,035	1,319	0,9385	0	-0,035	1,322	0,9384	0
M3 (sin b_3)	-0,033	1,319	0,9385	3	-0,033	1,325	0,9383	24
M4 (sin b_2 ni b_3)	-0,043	1,328	0,9381	53	-0,043	1,332	0,9379	64
M5	-0,040	1,452	0,9323	729	-0,040	1,455	0,9322	733
M6	0,281	1,664	0,9225	1.767	0,280	1,674	0,9223	1.797
M7	-0,029	1,322	0,9384	15	-0,029	1,324	0,9383	14
M8	-0,081	1,382	0,9356	355	-0,080	1,385	0,9355	356
M9	-0,059	1,375	0,9360	313	-0,059	1,378	0,9358	321

encuentran el modelo M3 (Tomé, 1988) ajustado sin considerar la edad, y el modelo M7 (Cañadas *et al.*, 1999), si bien estos tres modelos proporcionaron valores muy similares de los estadísticos de comparación utilizados.

En la Figura 1 se muestran los gráficos de residuos frente a valores predichos de los tres modelos que mejores resultados proporcionaron para los estadísticos de comparación calculados. En ellos se observa que no existen tendencias sistemáticas que indiquen la pre-

sencia de heterocedasticidad y que, de nuevo el modelo M2, presenta la mejor apariencia gráfica.

En la Figura 2 se muestran los gráficos PP, que enfrentan las frecuencias relativas acumuladas de los residuos frente a la probabilidad de la distribución normal para los tres mejores modelos. En ellos no se observa una tendencia clara que indique un incumplimiento grave de la hipótesis de normalidad, por lo que las estimaciones de los parámetros y sus errores estándar aproximados se consideran válidos.

**Figura 1.** Gráficos de residuos frente a valores predichos de los tres modelos determinísticos que proporcionaron mejores resultados para los estadísticos de comparación empleados.

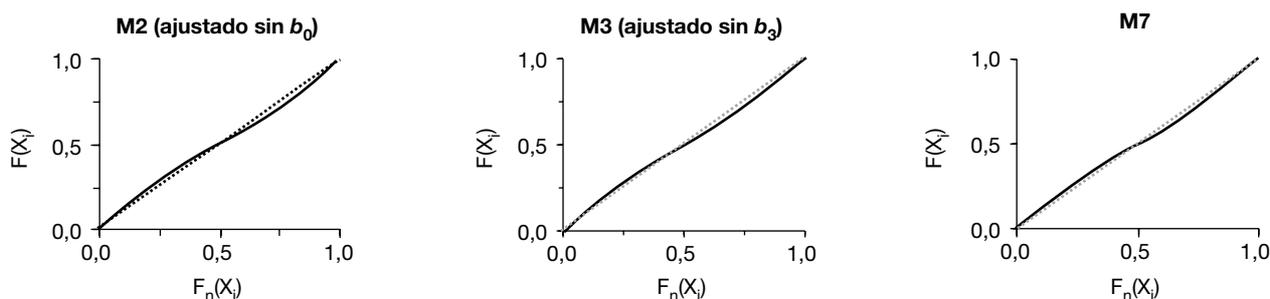


Figura 2. Gráficos PP de frecuencias relativas acumuladas de los residuos $F_n(x_i)$ frente a la distribución normal $F(x_i)$ (en línea continua) superpuestas sobre la diagonal $y = x$ (en línea discontinua).

En ellos se aprecia que la distribución observada de los residuos se aproxima mucho a la teórica, no evidenciándose problemas de falta de normalidad. La ausencia de heterogeneidad y la normalidad de los datos empleados garantizan la validez de las estimaciones de los parámetros y sus errores estándar aproximados.

Por último, en la Figura 3 se muestran los gráficos del sesgo y de la raíz del error medio cuadrático por clases diamétricas para los tres modelos seleccionados a partir de los estadísticos de comparación. En ella se observa que todos los modelos tienen un comportamiento similar, con un error reducido en la predicción de alturas para árboles de diámetro normal superior a 15 cm e inferior a 42 cm. Para árboles más pequeños, los modelos M2 y M3 subestiman ligeramente la verdadera altura, siendo más acusado el comportamiento del modelo M3; por su parte, el modelo M7 tiende a sobreestimar levemente la altura real. Con respecto a la raíz del error medio cuadrático, los modelos M2 y M7 presentan los mejores resultados, mien-

tras que el modelo M3 provoca un error considerable para los árboles más pequeños. Para árboles con diámetros normales de más de 42 cm los tres modelos tienen un comportamiento errático, quizá debido a la falta de datos en las clases diamétricas superiores.

Teniendo en cuenta las consideraciones apuntadas, se propone la siguiente modificación del modelo M2 (Gaffrey, 1988) como ecuación altura-diámetro generalizada para las masas regulares de *Pinus sylvestris* en Galicia procedentes de plantación:

$$h = 1,3 + (H_0 - 1,3) e^{7,197 \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right)} \quad [18]$$

donde h es la altura total del árbol considerado (m), d su diámetro normal (cm), y H_0 (m) y d_0 (cm) son, respectivamente, la altura y el diámetro de los árboles dominantes (valores medios de los 100 pies más gruesos por hectárea) de la masa en la que se asienta dicho árbol.

Hay que tener en cuenta que el modelo seleccionado es sencillo (sólo incluye un parámetro), y que las

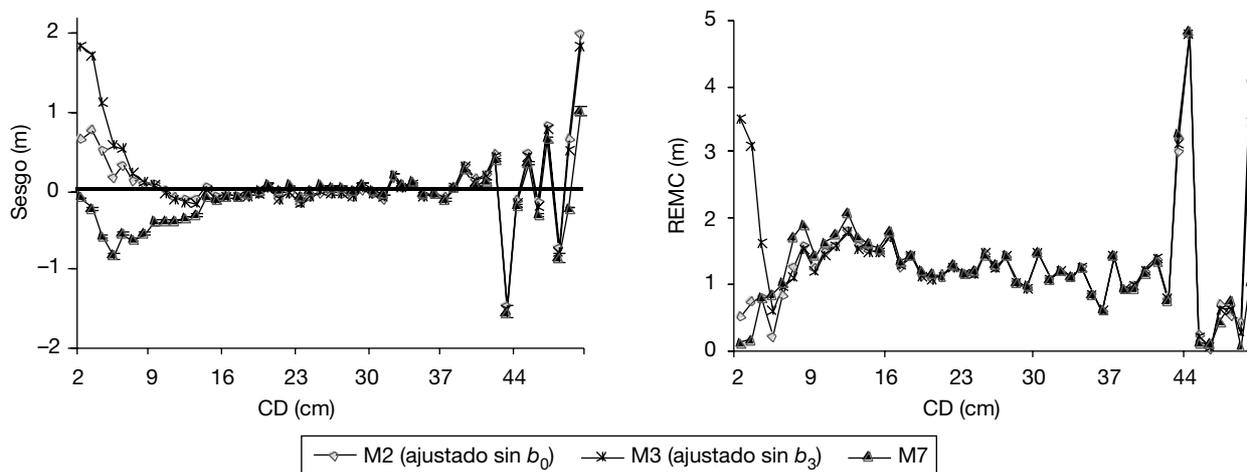


Figura 3. Valores de sesgo (izquierda) y raíz del error medio cuadrático (derecha) obtenidos por clases diamétricas a partir de las estimaciones de altura de los modelos determinísticos que mostraron los mejores resultados de los estadísticos de comparación empleados.

variables de masa que requiere para su aplicación pueden calcularse a partir de los datos recogidos habitualmente en los inventarios forestales.

Estimación estocástica de la altura

Las estimaciones determinísticas de la altura se pueden obtener utilizando la ecuación [18], mientras que las predicciones estocásticas requieren, además, la realización de los siguientes pasos:

1. Calcular el error estándar de la predicción por medio de la ecuación [16], donde la matriz de varianzas-covarianzas de la estimación de los parámetros es:

$$\mathbf{s}^2(\mathbf{b}) = (0,003876)$$

El vector de derivadas parciales $\mathbf{z}(\mathbf{b})_j$ y su transpuesta $\mathbf{z}(\mathbf{b})'_j$ se obtienen para cada árbol sustituyendo el valor estimado del único parámetro del modelo seleccionado en la siguiente ecuación de la derivada parcial con respecto a dicho parámetro:

$$\frac{\partial h}{\partial \beta_1} = (H_0 - 1,3) \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right) e^{\left(7,197 \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right) \right)}$$

El error medio cuadrático de la regresión (*EMC*) es 1,319 (Tabla 5).

2. Calcular la inversa de la función de distribución normal estándar para un número aleatorio generado uniformemente en el intervalo (0,1).

3. Estimar la altura estocástica mediante la ecuación [17] sustituyendo los valores obtenidos en los pasos previos.

Por ejemplo, para un árbol de 22 cm de diámetro normal que se encuentra en una masa con diámetro dominante de 25 cm y altura dominante de 14 m, la altura estimada mediante la componente determinística utilizando la ecuación [18] es de 13,51 m. El error estándar para una nueva estimación se calcula como:

$$s_{y_i} = \sqrt{1,319 + \left((14 - 1,3) \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{22} \right) e^{\left(7,197 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{22} \right) \right)} \right)^2 \cdot 0,003876} = 1,15 \text{ m}$$

Si, por ejemplo, el número generado aleatoriamente en el intervalo (0,1) es 0,83, el correspondiente valor de la inversa de la función de distribución normal estándar sería 0,954 y, por tanto, la altura predicha mediante la aproximación estocástica resultaría $\hat{y}_{i(estoc)} = 13,51 + 0,954 \cdot 1,15 = 14,61 \text{ m}$.

En este trabajo, para obtener los valores esperados de la aproximación estocástica, se generó un número pseudo-aleatorio para cada árbol mediante la función *NORMAL(seed)* del paquete estadístico SAS (SAS Institute Inc., 2004b), utilizando el valor cero como semilla para que el origen de la secuencia de números coincidiese con la hora del reloj del ordenador y fuese por tanto, a su vez, aleatorio. Además, se realizaron 100 simulaciones para todo el conjunto de datos y se promediaron por árbol.

Teniendo en cuenta que las variables explicativas de masa del modelo seleccionado son el diámetro y la altura dominantes (d_0 y H_0), el conjunto de datos experimentales y de alturas predichas por las aproximaciones determinística y estocástica se dividió en nueve grupos definidos por las diferentes combinaciones de tres rangos de igual amplitud para d_0 y H_0 . En la distribución de datos por clases de estas dos variables se observó que determinadas combinaciones extremas de d_0 y H_0 poco probables en la realidad estaban escasamente o nada representadas. Para el resto de combinaciones, se contó con un número suficiente de datos para proceder al análisis de la distribución de alturas por clases diamétricas.

En la Figura 4 se muestra la distribución de alturas para las clases diamétricas con mayor número de datos dentro de los cuatro grupos definidos por d_0 y H_0 mejor representados. En ella se compara gráficamente la distribución real de las alturas (que en general sigue una distribución normal dentro de cada clase diamétrica) con las estimadas por la ecuación determinística y por dos estimaciones estocásticas (una elegida aleatoriamente y otra obtenida como promedio de 100 simulaciones). Se incluye también el porcentaje de error, en valor absoluto, en la predicción del número de pies por hectárea para las tres alternativas analizadas. La estimación determinística proporciona una distribución de las alturas con escasa variabilidad centrada en torno al valor medio observado, mientras que las estimaciones estocásticas presentan una mayor variabilidad, acorde con la distribución observada, proporcionando, por tanto, una distribución de alturas más realista. Estas diferencias se verían incluso acrecentadas si se comparasen las dos metodologías (determinística y estocástica) con un número suficiente de datos altura-diámetro dentro de una masa homogénea, ya que aunque los grupos establecidos reducen la heterogeneidad de condiciones estacionales y selvícolas, sigue existiendo cierta variabilidad no atribuible a la propia relación altura-diámetro de cada masa individual.

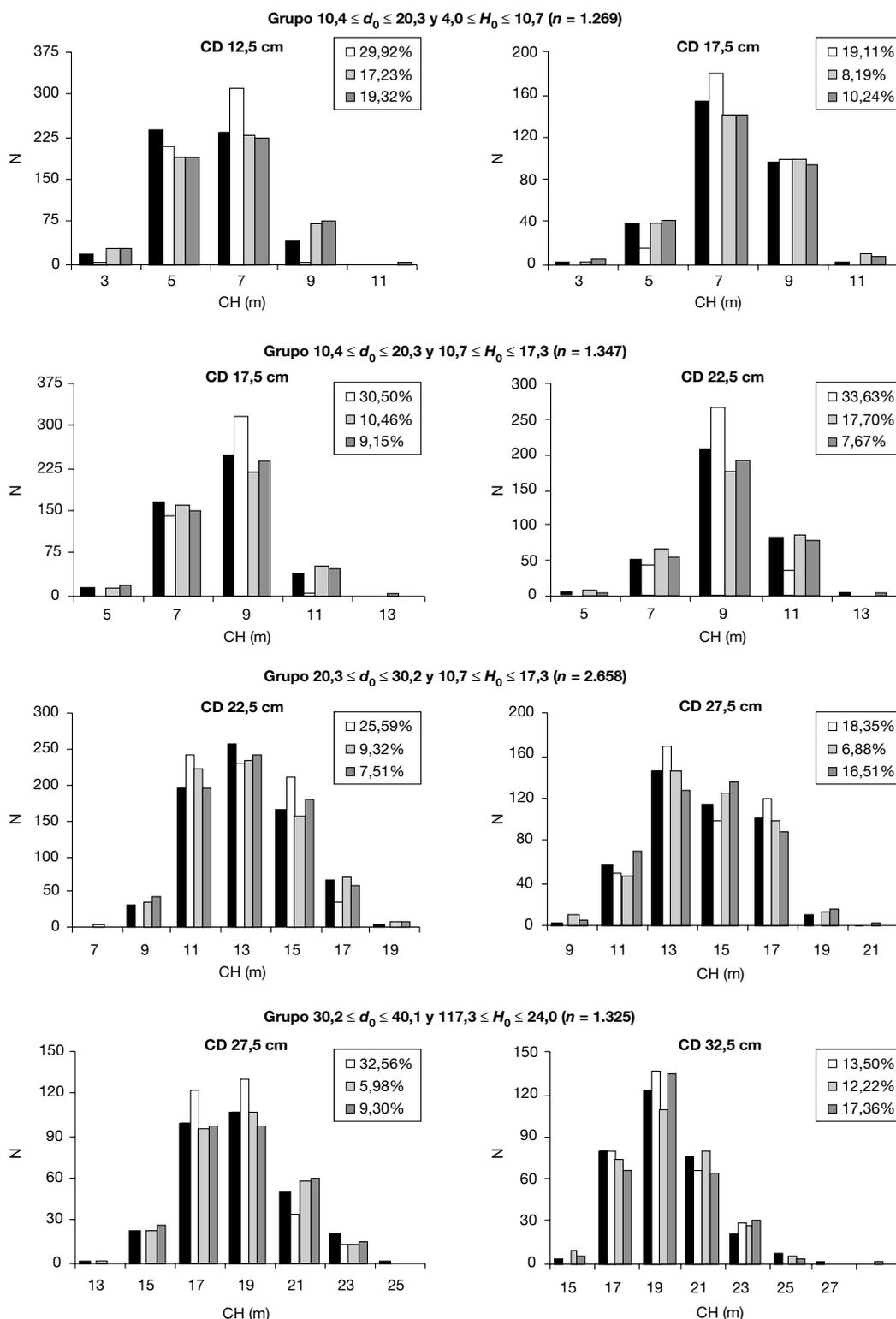


Figura 4. Distribución del número de pies por clases diamétricas y de alturas para las diferentes combinaciones de diámetro dominante (d_0) y altura dominante (H_0). En negro, distribución real observada; en blanco, distribución generada con el modelo determinístico (ecuación [18]); en gris claro y en gris oscuro, distribuciones generadas con la aproximación estocástica para una simulación de números pseudo-aleatorios elegida al azar y para el promedio de 100 simulaciones, respectivamente. La leyenda indica el porcentaje de error, en valor absoluto, en las estimaciones del número de pies por hectárea para estas tres alternativas.

Conclusiones

La mayoría de los modelos analizados han funcionado adecuadamente para describir la relación altura-diámetro de las masas de *Pinus sylvestris* L. en Galicia. Las variables independientes diámetro normal y diámetro y altura dominantes son suficientes para explicar la mayor parte de la variabilidad de los datos de altura total de un árbol. Una modificación del modelo de Gaffrey (1988) que incluye dichas variables como regresoras proporcionó los mejores resultados de los estadísticos y gráficos utilizados para comparar los diferentes modelos. Las variables necesarias para utilizar el modelo requieren un bajo esfuerzo de muestreo, siendo sólo necesario medir los diámetros y una muestra de alturas. Además, dichas variables se recogen en la mayoría de los inventarios forestales y pueden proyectarse hacia el futuro con ecuaciones de crecimiento de uso habitual.

Se ha añadido una componente estocástica al modelo determinístico que permite imitar adecuadamente la variabilidad real de las alturas para un mismo diámetro, proporcionando predicciones más realistas del número de árboles por clases diamétricas y de altura, con las consiguientes ventajas en la estimación de volúmenes mediante tarifas de cubicación de dos entradas o funciones de perfil de tronco para el total de una masa.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante el proyecto AGL2001-3871-C02-01 «Crecimiento y evolución de masas de pinar en Galicia».

Referencias bibliográficas

- AMATEIS R.L., RADTKE P.J., BURKHART H.E., 1995. TAU YIELD: A stand-level growth and yield model for thinned and unthinned loblolly pine plantations. School of Forestry and Wildlife Resources, VPI & SU. Report no. 82.
- BELSEY D.A., 1991. Conditioning diagnostics, collinearity and weak data in regression. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- BENNETT F.A., CLUTTER J.L., 1968. Multiple-product yield estimates for unthinned slash pine plantations—pulpwood, sawtimber, gum. USDA For Serv Res Pap. SE-35.
- BURNHAM K.P., ANDERSON D.R., 1998. Model selection and inference: a practical information-theoretic approach. Springer-Verlag, New York.
- CAÑADAS N., GARCÍA C., MONTERO G., 1999. Relación altura-diámetro para *Pinus pinea* L. en el Sistema Central. Congreso de Ordenación y Gestión Sostenible de Montes, Santiago de Compostela, 4-9 octubre. Tomo I, pp. 139-153.
- CURTIS R.O., 1967. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. For Sci 13, 365-375.
- DAVIS L.S., JOHNSON K.N., BETTINGER P.S., HOWARD T.E., 2001. Forest management: to sustain ecological, economic, and social values. McGraw-Hill Series in Forest Resources, New York.
- DIÉGUEZ-ARANDA U., ÁLVAREZ-GONZÁLEZ J.G., BARRIO-ANTA M., ROJO-ALBORECA A., 2005. Site quality equations for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (north-western Spain). Ann For Sci 62, 143-152.
- DRAPER N.R., SMITH H., 1998. Applied regression analysis. 3rd edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- FANG Z., BAILEY R.L., 1998. Height-diameter models for tropical forests on Hainan Island in southern China. For Ecol Manage 110, 315-327.
- GADOW K.v., REAL P., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., 2001. Modelización del crecimiento y la evolución de los bosques. IUFRO World Series vol. 12, Viena.
- GAFFREY D., 1988. Forstamts- und bestandesindividuelles Sortimentierungsprogramm als Mittel zur Planung, Aushaltung und Simulation. Diplomarbeit Forsliche Fakultät, Univ. Göttingen.
- HARTLEY H.O., 1961. The modified Gauss-Newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares. Technometrics 3, 269-280.
- HUANG S., TITUS S.J., WIENS D., 1992. Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. Can J For Res. 22, 1297-1304.
- HUI G.Y., GADOW K.v., 1993. Zur Entwicklung von Einheitshöhenkurven am Beispiel der Baumart *Cunninghamia lanceolata*. Allg Forst-u J-Ztg 164, 218-220.
- JUDGE G.G., HILL R.C., GRIFFITHS W.E., LÜTKEPOHL H., LEE T.-C., 1988. Introduction to the theory and practice of econometrics. 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- KOZAK A., KOZAK R., 2003. Does cross validation provide additional information in the evaluation of regression models? Can J For Res 33, 976-987.
- LAPPI J., 1997. A longitudinal analysis of height/diameter curves. For Sci 43, 555-570.
- LEI Y., PARRESOL B.R., 2001. Remarks on height-diameter modelling. USDA For Serv Res Note SRS-10.
- LENHART J.D., 1968. Yield of old-field loblolly pine plantations in the Georgia Piedmont. Ph. D. Thesis. University of Georgia, Athens.
- LENHART J., CLUTTER J., 1971. Cubic foot yield tables for old field loblolly pine plantations in the Georgia piedmont. Ga For Res Council Rep 22, Series 3.
- LÓPEZ SÁNCHEZ C.A., GORGOSO J.J., CASTEDO F., ROJO A., RODRÍGUEZ R., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., SÁNCHEZ F., 2003. A height-diameter model for

- Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). Ann For Sci 60, 237-245.
- MØNNESS E.N., 1982. Diameter distributions and height curves in even-aged stands of *Pinus sylvestris* L. Medd. No. Inst. Skogforsk 36, 1-43.
- MYERS R.H., 1990. Classical and modern regression with applications. 2nd edition. Duxbury Press, Belmont, California.
- NETER J., KUTNER M.H., NACHTSHEIM C.J., WASSERMAN W., 1996. Applied linear statistical models. 4th edition. McGraw-Hill, New York.
- NILSON A., 1999. Pidev metsakorraldus- mis see on. Pidev metsakorraldus. EPMÜ Metsandusteaduskonna toimetised 32, 4-13.
- PARRESOL B.R., LLOYD F.T., 2004. The stochastic tree modelling approach used to derive tree list for the GIS/CISC identified stands at the Savannah River Site. Internal Report. USDA For Serv SRS, Asheville, NC.
- PÁSCOA F., 1987. Estrutura, crescimento e produção em povoamentos de pinheiro bravo. Um modelo de simulação. Ph. D. Thesis. Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa (inédito).
- PEÑA D., 2002. Regresión y diseño de experimentos. Alianza Editorial, Madrid.
- PENG C.H., 1999. Nonlinear height-diameter models for nine tree species in Ontario boreal forests. Ontario Forest Research Institute, Ministry of Natural Resources. For Res Report no. 155.
- RYAN T.P., 1997. Modern regression methods. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- SAS INSTITUTE INC., 2004a. SAS/ETS® 9.1 User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc.
- SAS INSTITUTE INC., 2004b. SAS OnlineDoc® 9.1.2., Cary, NC: SAS Institute Inc.
- SCHRÖDER J., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., 2001. Developing a generalized diameter-height model for maritime pine in northwestern Spain. Forstw Cbl 120, 18-23.
- SLOBODA V.B., GAFFREY D., MATSUMURA N., 1993. Regionale und lokale Systeme von Höhenkurven für gleichaltrige Waldbestände. Allg Forst-u J -Ztg 164, 225-228.
- SOARES P., TOMÉ M., 2002. Height-diameter equation for first rotation eucalypt plantations in Portugal. For Ecol Manage 166, 99-109.
- TOMÉ M., 1988. Modelação do crescimento da árvore individual em povoamentos de *Eucalyptus globulus* Labill. (1ª rotação) na região centro de Portugal. Ph. D. Thesis, Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa (inédito).
- WOOLLONS R.C., HAYWARD W.J., 1985. Revision of a growth and yield model for radiata pine in New Zealand. For Ecol Manage 11, 191-202.
- ZARNOCH S.J., FEDUCCIA D.P., BALDWIN V.C., DELL T.R., 1991. Growth and yield predictions for thinned and unthinned slash pine plantations on cutover sites in the West Gulf region. USDA For Serv Res Pap. SO-264.