

Elaboración de una tarifa con clasificación de productos para *Quercus robur* L. en Galicia basada en un modelo de volumen porcentual

M. Barrio Anta*, J. G. Álvarez González e I. J. Díaz-Maroto Hidalgo

Departamento de Ingeniería Agroforestal. Escuela Politécnica Superior de Lugo. Universidad de Santiago de Compostela. Campus Universitario. 27002 Lugo. España

Resumen

Se han ajustado 8 ecuaciones de volumen total de árbol individual y cuatro modelos de razón de volumen (para diámetros límites en punta delgada) a una muestra formada por 225 árboles tipo de *Quercus robur* L. repartidos por toda el área de distribución de la especie en Galicia (Noroeste de España). Dicha muestra estaba compuesta por árboles de diversas edades que han crecido en rodales con un amplio rango de calidades de estación y espesuras. Los datos para construir los modelos de razón presentan una estructura longitudinal, por lo que se ha empleado un modelo autorregresivo de orden 2 para corregir la dependencia de los errores inherente a este tipo de datos. La selección del mejor modelo en cada uno de los grupos (ecuaciones de volumen total y ecuaciones de volumen porcentual) se ha basado en el empleo de varios estadísticos de comparación, validándose posteriormente mediante el uso de los residuos eliminados. Finalmente se ha construido la tarifa con clasificación de productos combinando la mejor ecuación de volumen total y el mejor modelo de razón de volumen seleccionados previamente.

Palabras clave: *Quercus robur*, ecuación, volumen total, razón de volumen, clasificación de productos.

Abstract

A volume prediction system for *Quercus robur* L. in Galicia (Northwestern Spain) based on a volume ratio equation

Eight total-volume equations and four volume-ratio equations (for diameter limits) were fitted to a sample of 225 trees of *Quercus robur* of different ages. The trees were collected in stands growing in a great variety of site qualities and densities in Galicia (Northwest of Spain). The data employed to develop volume ratio equations have a longitudinal structure so a second order autoregressive model was used to correct the error dependence implicit in this kind of data. Several «goodness-of-fit» statistics were used in order to select the best equations within each group (total volume equations and volume ratio equations) and cross-validation was used to analyse the performance of the model. Finally, the models selected were combined to develop a volume equation with product classification.

Key words: *Quercus robur*, equation, total volume, volume ratio, product classification.

Introducción

El carballo (*Quercus robur* L.) es la segunda especie gallega en cuanto a superficie ocupada con más de 188.000 ha (Xunta de Galicia, 2001), aunque su importancia económica es baja siendo su volumen medio anual de corta en el período 1992-2000 de 5.863 m³, lo que representa solamente el 0,25% del promedio total de cortas de madera realizadas en Galicia en ese período (Xunta de Galicia, 2002). No obstante, la

determinación del volumen de madera en pie es una necesidad para la gestión sostenible de las masas forestales de cualquier especie con aprovechamiento maderero, para lo cual se debe disponer de herramientas que permitan obtener el volumen de un árbol de forma rápida y fiable, mediante la medición de variables sencillas de obtener como el diámetro normal o la altura total.

Una de estas herramientas son las tarifas de cubicación de árbol individual, también llamadas tablas por razones históricas (García, 1995) con las que se puede estimar el volumen de los pies de una masa con una considerable exactitud. Sin embargo, estas ecua-

* Autor para la correspondencia: barrio@lugo.usc.es
Recibido: 27-11-03; Aceptado:06-07-04.

ciones no aportan información sobre las dimensiones de los productos a obtener o sobre su valor comercial. Por esta razón es conveniente desarrollar modelos que estimen la cantidad de madera de un árbol concreto que se puede obtener según destinos industriales, proporcionando al forestal herramientas útiles para la planificación de la gestión forestal y de las inversiones (Gadow *et al.*, 2001).

Existen básicamente dos metodologías diferentes para la determinación del volumen de un árbol individual hasta un determinado diámetro en el tronco o una altura concreta: las funciones de perfil del tronco y las funciones de volumen porcentual o volumen de razón (Trincado *et al.*, 1997; Gadow *et al.*, 2001). Las primeras son relaciones matemáticas entre los diámetros o secciones del tronco en cualquier punto del mismo y la altura a la que se encuentran (Newhan, 1992; Castedo y Álvarez González, 2000), mientras que las funciones de razón estiman el volumen del árbol hasta un determinado punto del tronco, definido por su diámetro o su altura, como un porcentaje del volumen total del mismo (Cao *et al.*, 1980; van Deusen *et al.*, 1981). Estas últimas fueron introducidas por Burkhart (1977) y han sido ampliamente utilizadas en modelización forestal debido fundamentalmente a su sencillez y facilidad de uso (e.g. Reed y Green, 1984; Zepeda y Almonte, 1994; Valdez y Lynch, 2000; Tomé *et al.*, 2001; Barrio, 2003). Las estimaciones de volumen utilizando esta metodología se basan en el empleo conjunto de dos ecuaciones (Prodan *et al.*, 1997):

— Una ecuación para estimar el volumen total del árbol, por ejemplo una tarifa de cubicación local de una entrada $V = f(d)$ o una tarifa más general de dos entradas $V = f(d, h)$.

— Un factor de razón (R) que permite estimar la proporción de volumen hasta un determinado punto del tronco (diámetro o altura), de modo que el volumen hasta dicho punto (V_i) se obtiene como el producto del volumen total por el factor de razón $V_i = V \cdot R$.

Las funciones de perfil son, en general, más complejas en su formulación y, por lo tanto, las metodologías de ajuste y empleo posterior para estimar volúmenes son también más complicadas. Sin embargo, tienen la ventaja de ser más flexibles que las funciones de razón al emplear una sola ecuación (Trincado *et al.*, 1997).

Dado que las funciones de razón emplean dos ecuaciones en las estimaciones de volumen, podría suponerse que los valores obtenidos con las funciones de perfil son más exactos, sin embargo, en las escasas re-

ferencias bibliográficas en las que se comparan ambas metodologías no se han obtenido diferencias significativas entre ellas (ver Parresol *et al.*, 1986; Trincado *et al.*, 1997). La razón que apuntan dichos autores es que para estimar volúmenes con las funciones de perfil hasta un cierto diámetro es preciso integrar dicha función con respecto a la altura, lo que exige obtener su inversa y, dada su complejidad, utilizar métodos numéricos para estimar el resultado de la integral.

Por otro lado, una ventaja adicional de las funciones de razón es que el concepto se puede extender fácilmente al ámbito de una masa para construir una tarifa de volumen porcentual de masa con sólo sustituir las variables diámetro normal o altura por variables de masa como la altura media o el diámetro medio cuadrático. Por el contrario, la construcción de una función de perfil de masa requiere relacionar los parámetros de una función de perfil de árbol con variables de masa, siendo frecuente encontrar malas correlaciones entre estas variables (Gadow *et al.*, 2001).

En este trabajo se ha optado finalmente por ajustar funciones de razón debido a que para su empleo no es necesario contar con la altura de los árboles, ya que los volúmenes totales se pueden estimar con tarifas locales de cubicación de una entrada. En el caso de las funciones de perfil sería imprescindible conocer la altura de los árboles, por lo que habitualmente obligaría a obtenerla a partir de relaciones altura-diámetro locales o generalizadas y, dada la selvicultura seguida con la especie en el área geográfica de estudio con cierta presencia de árboles trasmochos, las estimaciones obtenidas con estas ecuaciones son sesgadas y poco precisas (Barrio, 2003).

Material y Métodos

Datos utilizados

Para la elaboración de la tarifa de árbol individual con clasificación de productos se ha apeado una muestra de 225 árboles tipo procedentes de 94 parcelas permanentes de muestreo instaladas en masas naturales de esta especie distribuidas por toda la geografía gallega. Dichas parcelas abarcan un amplio abanico de edades (entre 34 y 155 años), calidades de estación (entre 7,5 y 22 m a los 50 años) y densidades (entre 302 y 3.025 pies/ha). En cada árbol apeado se ha medido el diámetro normal, el diámetro a 4 metros en cruz y la altura total. Posteriormente se ha dividido el fus-

te en trozas que varían entre uno y tres metros de longitud, en las que se ha medido el diámetro en cruz y el espesor de corteza en sus extremos. Para cubicar las trozas se ha empleado la fórmula de Smalian, que asemeja el volumen al de un cilindro de sección igual a la media de las secciones extremas de las trozas, excepto en la última troza o rabeón que se ha asemejado a un cono. Los estadísticos descriptivos de la muestra empleada en la construcción de las tarifas se presentan en la Tabla 1.

Modelos empleados

Como ya se comentó anteriormente, el desarrollo de funciones de razón exige el empleo combinado de dos ecuaciones: una tarifa de cubicación de volumen total y una ecuación de razón. Aunque es conveniente el empleo de tarifas de cubicación locales en las que no intervenga la variable altura, se va a completar el estudio ajustando una serie de tarifas de cubicación de dos entradas como complemento a la ecuación de razón.

Las tarifas de cubicación de árbol individual son expresiones matemáticas que permiten estimar el volumen de un árbol en función de una o más variables dendrométricas (variables de entrada) medidas directamente en él. Dichas variables de entrada deben ser (Caillez, 1980): (1) poco numerosas y fáciles de medir para que la tarifa tenga una amplia gama de aplicaciones, (2) variables fuertemente correlacionadas con el volumen y (3) variables poco correlacionadas entre sí, para que el poder explicativo de una variable persista al introducir otra nueva.

Existen numerosas ecuaciones usadas en la construcción de tarifas de cubicación de árbol individual, una recopilación de algunas de las más empleadas puede encontrarse en Spurr (1952) y en Loetsch *et al.*

(1973). Según Rondeux (1993), las ecuaciones que habitualmente proporcionan mejores resultados son las siguientes:

$$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot d^2 h \quad [1]$$

$$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot d^2 + \beta_2 \cdot d^2 h \quad [2]$$

$$\text{Log}V = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Log}(d) + \beta_2 \cdot \text{Log}(h) \quad [3]$$

Estos modelos sirven de base para el desarrollo de otros más complejos mediante la combinación de la altura con el diámetro u otras combinaciones entre variables, que dan lugar a modelos polinómicos.

Los modelos considerados inicialmente en este trabajo son los empleados por Nívar y Domínguez (1997) y aparecen reflejados en la Tabla 2 identificados por la letra V seguida de un número de orden.

En cuanto a los modelos de razón de árbol individual, se han probado cuatro ecuaciones distintas, que combinadas con la tarifa de árbol individual estiman el volumen hasta un determinado diámetro límite de utilización (d_l). En la Tabla 2 se muestran estos modelos, identificados con la letra R seguida de un número de orden, junto con los autores que los propusieron.

Metodología de ajuste

Se ha empleado una metodología de ajuste distinta para cada una de las dos ecuaciones de las que consta una tarifa con clasificación de productos basada en un modelo de razón de volumen. Así, el ajuste de las tarifas de cubicación de volumen total se ha realizado mediante regresión lineal simple o regresión lineal ponderada empleando para ello el procedimiento REG del programa estadístico SAS/STAT (Sas Institute Inc., 2001a).

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de los datos de partida empleados en la construcción de las tarifas de cubicación

Estadístico	Variables de árbol				Variables de masa			
	d (cm)	d ₄ (cm)	h (m)	V _{cc} (m ³)	N (pies/ha)	H _m (m)	H ₀ (m)	G (m ² /ha)
Mínimo	8,40	6,5	7,80	0,03	315,32	5,28	7,17	3,41
Máximo	48,70	44,05	26,60	1,67	2010,8	23,69	25,58	72,88
Media	27,6	23,64	15,97	0,49	750,79	14,54	16,96	28,22
Varianza	65,00	60,01	13,25	0,11	11.6526,23	10,86	11,12	84,25
Desv. estándar	8,06	7,75	3,64	0,33	341,35	3,29	3,33	9,17
Coef. variación (%)	29,21	32,76	22,79	67,21	45,46	22,66	19,65	32,52

d: diámetro normal. d₄: diámetro a 4 m de altura. h: altura total. V_{cc}: volumen con corteza. N: densidad. H_m: altura media de la masa. H₀: altura dominante de la masa. G: área basimétrica.

Tabla 2. Ecuaciones de cubicación de volumen total consideradas en el análisis inicial y modelos de razón analizados

Modelo	Denominación y referencia	Ecuación
V1	Variable combinada (Spurr, 1952)	$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot (d^2 \cdot h)$
V2	Polinómico cuadrático (Spurr, 1952)	$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot (d^2 \cdot h) + \beta_2 \cdot (d^2 \cdot h)^2$
V3	Polinómico cúbico (Spurr, 1952)	$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot (d^2 \cdot h) + \beta_2 \cdot (d^2 \cdot h)^2 + \beta_3 \cdot (d^2 \cdot h)^3$
V4	Múltiple	$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot h + \beta_2 \cdot (d \cdot h) + \beta_3 \cdot (d^2 \cdot h)$
V5	Variable combinada generalizada (Spurr, 1952)	$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot d^2 + \beta_2 \cdot h + \beta_3 \cdot (d^2 \cdot h)$
V6	Múltiple (Spurr, 1952)	$V = \beta_0 + \beta_1 \cdot (d^2 \cdot h) + \beta_2 \cdot h + \beta_3 \cdot (d \cdot h^2)$
V7	Variable combinada sin término independiente linealizado (Spurr, 1952)	$\ln V = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(d^2 \cdot h)^{\beta_2}$
V8	Alométrico linealizado	$\ln V = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(d) + \beta_2 \cdot \ln(h)$
R1	Burkhart (1977)	$R = 1 + \beta_4 \left(d_i^{\beta_5} / d^{\beta_6} \right)$
R2	Van Deusen <i>et al.</i> (1981)	$R = \exp\left(\beta_4 \cdot x^{\beta_5}\right)$
R3	Clark y Thomas (1984)	$R = \exp\left(\beta_4 \cdot d_i^{\beta_5} \cdot d^{\beta_6}\right)$
R4	Reed y Green (1984) modificada	$R = 1 + \left(\beta_4 d_i^{\beta_5} / d^{\beta_6} h^{\beta_7}\right)$

V: volumen total del árbol. R: volumen porcentual de cada árbol para un determinado diámetro límite de utilización expresado en tanto por uno sobre el volumen total. $x = d_i/d$: siendo d_i el diámetro límite de utilización hasta el cual se calcula el volumen del árbol; d , el diámetro normal; h , la altura total, y β_i , los parámetros a estimar en el ajuste.

Un problema frecuente al realizar un análisis de regresión empleando modelos lineales múltiples o polinómicos con un número elevado de variables regresoras es la existencia de correlación entre ellas (en muchos de los modelos analizados algunas variables independientes proceden de productos cruzados de otras), ya que en caso de existir, se debe corregir para que las variables correlacionadas no aporten información redundante (Kozak, 1997). Este problema se denomina multicolinealidad y se puede detectar mediante el empleo del índice de condicionamiento (IC). Este índice se basa en el cálculo del cociente del mayor autovalor de la matriz de varianzas-covarianzas y el autovalor asociado a cada variable. En el caso de que exista una fuerte dependencia lineal de alguna variable con las restantes su autovalor asociado será muy pequeño, por lo que el valor del índice de condicionamiento será muy alto. En general se asume que si $1 < IC < 10$ no hay multicolinealidad, si $10 \leq IC \leq 30$ hay un problema moderado y si $IC \geq 30$ hay un problema grave de multicolinealidad (Belsey, 1991; Peña, 1995).

Otro problema frecuente en el ajuste de las tarifas de cubicación es la alta heterocedasticidad (la varianza de los residuos de la regresión para el volumen no es constante, aumentando con el valor de éste). La heterocedasticidad influye en el modelo de regresión, ya que los estimadores mínimos cuadráticos siguen siendo centrados pero no son eficientes y las fórmulas de las varianzas de los estimadores de los parámetros no son correctas y por tanto no se pueden aplicar los contrastes de significación (Kozak, 1997).

Para solventar la falta de homogeneidad de la varianza inherente al ajuste de ecuaciones de volumen se ha empleado regresión ponderada, aplicada por primera vez a las tarifas de cubicación por Cunia en 1964 (García, 1995) y también transformaciones logarítmicas; siendo este último un caso particular de una solución más amplia de transformaciones de variables conocida como familia de transformaciones de Box-Cox (Ryan, 1997) y que permite el ajuste de las ecuaciones en condiciones homocedásticas.

Cuando se emplea la regresión ponderada se debe conocer la relación entre la varianza de los errores y

las variables de entrada, lo que resulta bastante complicado. Habitualmente se asume que en los modelos empleados para ajustar tarifas de cubicación de dos entradas, la varianza del error es proporcional al valor de la variable ($d^2 \cdot h$), o en menor medida al cuadrado de dicha variable (Furnival, 1961; Caillez, 1980), por lo que los pesos empleados han sido la inversa de este producto y la inversa del producto elevado al cuadrado.

En cuanto a las ecuaciones de volumen porcentual, se debe tener en cuenta que los datos empleados en su construcción presentan una estructura longitudinal, ya que se dispone de varias mediciones a lo largo del tronco para un mismo árbol. Esta particular estructura puede provocar el incumplimiento de la hipótesis más importante en el análisis de regresión: la independencia de los datos. Realizar el ajuste ignorando la falta de independencia provoca que el estimador de la matriz de covarianzas de las estimaciones de los parámetros esté negativamente sesgado (subestimado) y esto hace que todos los errores estándar y los p-valores asociados sean sesgados, lo que afecta al procedimiento de comparación de modelos, aunque el estimador de los parámetros no se verá afectado y continuará siendo insesgado (West, 1995). La comprobación de la dependencia se ha llevado a cabo mediante el empleo del estadístico de Durbin-Watson (DW): los valores pequeños de este estadístico indican alta correlación positiva, considerándose que no existe dependencia espacial o temporal cuando los valores del estadístico de DW son próximos a 2 (Linnell, 1996; Draper y Smith, 1998).

Aunque existe amplia literatura disponible sobre el análisis de datos longitudinales (e.g. Davidian y Giltinan, 1995; Verbeke y Molenberghs, 2000; Diggle *et al.*, 2002), la estructura particular del error en este tipo de datos ha sido con frecuencia ignorada en la modelización forestal (Gregorie *et al.*, 1995; Tassisa y Burhart, 1998; Garber y Maguire, 2003). En general, se han empleado dos métodos para trabajar con datos longitudinales no recogidos en tiempos fijos y que presentan distinto número de mediciones por individuo: el primero es el empleo de modelos con coeficientes aleatorios y el segundo consiste en el empleo de modelos paramétricos para la matriz de varianzas-covarianzas de los datos (Zimmerman y Núñez Antón, 2001). En este trabajo se ha optado por este último método por presentar una serie de ventajas (Núñez-Antón y Zimmerman, 2001): (i) permite obtener de una forma más eficiente los estimadores de los parámetros del modelo de la ecuación de razón; (ii) permite obtener estimadores más adecuados para los errores estándar de los estimadores de los

parámetros de la ecuación de razón; (iii) en muchos casos, permite solucionar de forma efectiva los problemas de falta de datos o de datos no rectangulares; y (iv) puede emplearse aún cuando el número de mediciones sea muy grande en comparación con el número de individuos.

Se ha empleado un modelo autorregresivo en tiempo continuo, «*continuous autoregressive model*» (CAR) para la matriz de varianzas-covarianzas en el que se asume que las correlaciones decrecen con el incremento de la distancia ($d_{jj'}$) entre mediciones (h_{ij}), de la siguiente manera:

$$\text{Corr}[\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij'}] = \zeta^2 \cdot \rho^{d_{jj'}} \quad [4]$$

donde ρ es el parámetro autorregresivo a estimar con los datos, $d_{jj'} = |h_{ij} - h_{ij'}|$, $\forall j, j'$, ζ^2 es un escalar que representa el error medio cuadrático y ε_{ij} y $\varepsilon_{ij'}$ son los errores dentro de un árbol i en una medición a una altura j y a una altura j' (Pinheiro y Bates, 2000; Garber y Maguire, 2003). De esta forma, cada uno de los dos parámetros de la estructura del error de un modelo continuo autorregresivo de orden 2 [CAR(2)], se eleva a la distancia que separa una medición de la anterior (d_1) y una medición de dos anteriores (d_2), expresándose de la siguiente manera:

$$Y_i = f(X_i, \beta) + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i = \rho^{d_1} \cdot \varepsilon_{i-1} + \gamma^{d_2} \cdot \varepsilon_{i-2} + e_i \quad [5]$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

donde Y_i es el vector de la variable dependiente, X_i es la matriz de la(s) variable(s) independiente(s) del modelo, β es el vector de los parámetros a estimar mediante el ajuste de regresión, ε_i es el vector de los errores bajo la condición de no independencia, e_i el error estocástico del modelo $e_i \approx N(0, \sigma^2)$, ρ es el coeficiente de correlación entre el error de una estimación y el error de la estimación correspondiente a la medición anterior en el mismo individuo y γ es el coeficiente de correlación entre el error de una estimación y el error de la estimación correspondiente a dos mediciones anteriores del mismo individuo. El ajuste de los modelos de razón con estructuras autorregresivas de los errores se ha llevado a cabo empleando el procedimiento MODEL del programa SAS/ETS (Sas Institute Inc., 2001b).

Criterios para la selección de modelos: fase de ajuste

La capacidad de ajuste de los modelos se ha verificado con la obtención, a partir de los residuos (ε_i), de dos estadísticos utilizados con frecuencia en la bi-

bliografía forestal: el error medio cuadrático (*EMC*) que analiza la precisión de las estimaciones y el coeficiente de determinación ajustado (R_{Adj}^2), que refleja la variabilidad total que es explicada por el modelo y que tiene en cuenta el número total de parámetros a estimar.

Además, se ha empleado como elemento de decisión el valor del criterio de información de Akaike (*AIC*), que es un índice que se emplea para seleccionar el mejor modelo basado en minimizar la distancia de Kullback-Liebler y que tiene en cuenta el número de parámetros estimados en el ajuste (Burnham y Anderson, 2000). En este trabajo se ha calculado este criterio en valor relativo empleando como comparación el valor más pequeño obtenido en alguno de los modelos ajustados. De esta manera se obtienen valores fáciles de interpretar que permiten una rápida comparación de los modelos a contrastar (Burnham y Anderson, 2000).

Las expresiones de los estadísticos empleados son las siguientes:

$$\text{Error medio cuadrático: } EMC = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - p} \quad [6]$$

Coficiente de determinación ajustado:

$$R_{Adj}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot \left(\frac{N - 1}{N - p} \right) \quad [7]$$

Valor relativo del AIC:

$$\Delta_{AIC} = N \cdot \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2 \cdot K_j - \text{mínimo}(N \cdot \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2 \cdot K_j) \quad [8]$$

siendo $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$ el residuo correspondiente al dato i -ésimo; Y_i , $\hat{Y}_i$ y $\bar{Y}$ los valores observados, predichos y promedio respectivamente de la variable dependiente; N el número total de datos usados en el ajuste del modelo; p el número de parámetros a estimar; K_j el número de parámetros del modelo j más 1 ($K_j = p + 1$) y $\hat{\sigma}_j^2$ el estimador de la varianza del error del modelo j cuyo valor se obtiene como:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N} \quad [9]$$

De acuerdo con estos estadísticos un modelo será mejor que otro si presenta un menor valor de *EMC* y Δ_{AIC} y un mayor valor del R_{Adj}^2 .

Al analizar modelos con distintas variables dependientes, y para hacer comparables los valores de los estadísticos correspondientes a cada uno de ellos, se ha considerado una misma variable dependiente para el cálculo de los residuos. Además, en los modelos en que la variable dependiente se ha transformado, se ha incorporado un factor corrector del sesgo (c), que en el caso frecuente de que la transformación sea logarítmica aparece como multiplicativo en la expresión del modelo y que se calcula como:

$$c = \exp\left(\frac{EMC}{2}\right) \quad [10]$$

donde *EMC* es el error medio cuadrático del modelo logarítmico ajustado. Esta corrección, debida a Meyer (1944), es muy pequeña y se puede obviar, sin embargo numerosos autores recomiendan su inclusión para mejorar el grado de precisión del modelo (Baskerville, 1972; Alder, 1980; Sterba, 2001; Garber y Maguire, 2003).

Para la comparación de los modelos que tienen distinta variable dependiente (debido a que ésta ha sido transformada), la selección del mejor modelo también se determina mediante el empleo del índice propuesto por Furnival (1961). Este índice es una transformación aproximada de la función de verosimilitud que presenta la ventaja de ser sensible tanto al tamaño de los residuos como a la distribución de los mismos, correspondiendo valores altos de este índice con los ajustes menos precisos (González Doncel, 1989).

La expresión del índice de Furnival depende del modelo empleado y de los pesos utilizados en regresión ponderada, así la ecuación [11] se emplea para la determinación del índice en modelos ponderados, la ecuación [12] en modelos transformados logarítmicamente y la ecuación [13] en modelos sin ponderación ni transformación.

$$IF = \left[\frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \ln(W) / n \right] \cdot RMSE \quad [11]$$

$$IF = \left[\sum_{i=1}^n \ln X_i / n \right] \cdot RMSE \quad [12]$$

$$IF = RMSE \quad [13]$$

En estas expresiones *RMSE* es la raíz del error medio cuadrático residual de la regresión ajustada, n es el número de observaciones, W es el factor de ponderación para cada observación, $1/d^2h$ ó $1/(d^2h)^2$, X_i es el valor de la variable dependiente sin transformar para

cada observación y k es el valor de la potencia usada en el factor de ponderación.

Criterios para la selección de modelos: fase de validación

Una vez ajustado un modelo es necesario realizar una validación del mismo. Para ello, lo ideal sería disponer de un conjunto de datos independiente del utilizado para el ajuste (Huang *et al.*, 2002; Pretzsch *et al.*, 2002). No obstante, generalmente es difícil o muy costoso disponer de dicho conjunto independiente de datos, por lo que se han desarrollado numerosas metodologías de validación, aunque no hay ninguna estándar que se pueda usar para determinar de manera definitiva cuál es el mejor modelo entre varios candidatos analizados.

Así, es frecuente la fragmentación de la muestra de datos al azar en dos partes de distintas proporciones, empleando una en el ajuste de los modelos y otra en la validación. Esta metodología es poco consistente para muestras pequeñas y supone asumir que los datos han sido obtenidos en muestras separadas e independientes, lo que habitualmente no se cumple (Huang *et al.*, 2002). En este trabajo se ha usado como alternativa el empleo de los residuos eliminados, que son los residuos obtenidos para cada árbol empleando el modelo ajustado a todas las observaciones excepto las de dicho árbol. Este tipo de metodología se utiliza con frecuencia en la validación de modelos en el campo forestal (Tomé *et al.*, 2001; Soares y Tomé, 2002; López Sánchez *et al.*, 2003; Rodríguez y Molina, 2003) y ha sido denominada «validación cruzada por árbol» (*leave-one-tree-out cross-validation*) (Bi, 2000), pudiéndose obtener para un conjunto de datos independientes una serie de estadísticos similares a los que se obtienen para la fase de ajuste: error medio cuadrático (*EMC*), valor relativo del criterio de información de Akaike (Δ_{AIC}) e índice de Furnival (*IF*).

Todos ellos se calculan de manera análoga a la indicada anteriormente por las fórmulas [6], [7], [8], [11], [12] y [13] respectivamente, sustituyendo en este caso los valores de Y_i , $\hat{Y}_i$ y $\bar{Y}_i$ y N por los de Z_i , $\hat{Z}_i$ y $\bar{Z}_i$ y N' , que son respectivamente el valor de la observación i -ésima, los valores predichos, promedio y número de datos observados cuando el ajuste del modelo se ha realizado sin dicha observación « i ».

Se incluye también la eficacia del modelo ajustada (MEF_{Adj}), que tiene una expresión análoga a la del coeficiente de determinación ajustado:

$$MEF_{Adj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N'} (Z_i - \hat{Z}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N'} (Z_i - \bar{Z}_i)^2} \cdot \left(\frac{N' - 1}{N' - p} \right) \quad [14]$$

Resultados y Discusión

En primer lugar se describen los resultados obtenidos al ajustar las tarifas de cubicación de volumen total (modelos V1 a V8). Como ya se comentó en el apartado de Material y Métodos, en las tarifas que emplean como variable dependiente el volumen del árbol (modelos V1 a V6), se ha utilizado la regresión ponderada para evitar el problema de falta de homogeneidad de varianzas de los errores. En todos los casos, los mejores resultados se han obtenido con el empleo de pesos proporcionales al valor del producto (d^2h). Los ajustes de los modelos V7 y V8 que emplean como variable dependiente el logaritmo del volumen total del árbol se han ajustado por mínimos cuadrados ordinarios.

Al ajustar el modelo V2 se obtuvo un error estándar asociado al parámetro que acompaña al término (d^2h)² muy elevado, por lo que no se pudo rechazar la hipótesis nula de que dicho parámetro fuese igual a cero. De este modo, la expresión matemática reducida del modelo V2 coincide con la del modelo V1.

Un resultado similar se obtuvo al ajustar el modelo V3, en este caso la variable presentaba una ligera multicolinealidad, con un índice de condicionamiento de 10,5 y la variable (d^2h)² mostraba una alta multicolinealidad con un índice de condicionamiento de 31,8. Además, la inclusión de estas dos variables no suponía un aumento importante de la precisión del modelo puesto que el coeficiente de determinación ajustado pasaba del 0,952 al 0,954, por lo que se decidió descartarlas, siendo finalmente la expresión matemática del modelo V3 reducido equivalente a la del modelo V1.

El ajuste del modelo V4 llevó a excluir la variable (dh) al no poder rechazarse la hipótesis nula de que el parámetro que acompaña a dicha variable fuese significativamente diferente de cero. Por otro lado, el cálculo de los índices de condicionamiento indicó que la variable altura (h) presenta una multicolinealidad moderada con un valor de este índice de 18,9, por lo que se eliminó también esta última variable quedando el modelo V4 reducido a la expresión matemática del modelo V1.

Tabla 3. Valores de los estadísticos de comparación para las distintas ecuaciones empleadas

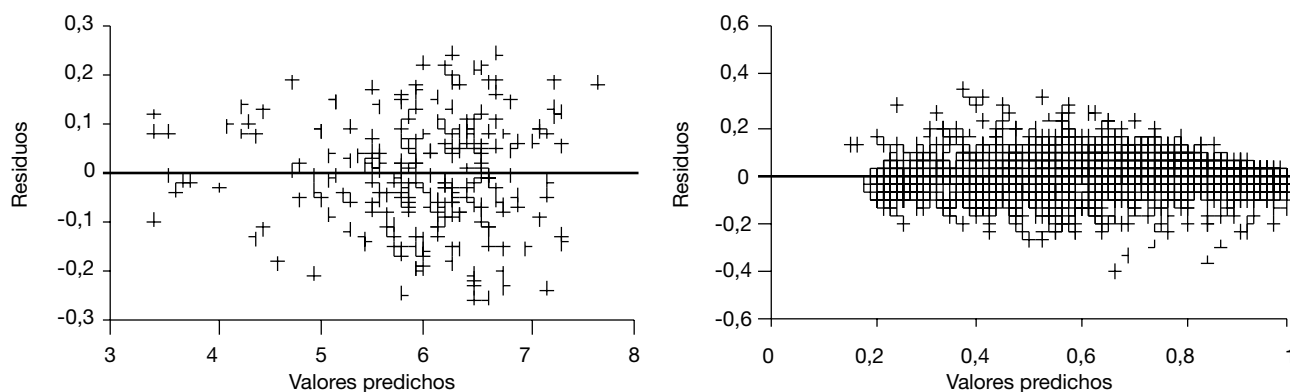
Modelo	Ponderación	Ajuste				Validación cruzada			
		EMC	R^2_{Adj}	Δ_{AIC}	IF	EMC	MEF_{Adj}	Δ_{AIC}	IF
V1	Sin ponderar	6.003,45	0,9536	11,53	77,48	6.336,01	0,9511	16,26	79,59
	$1/(d^2h)$	6.014,55	0,9536	11,94	52,24	6.164,57	0,9524	10,06	52,01
	$1/(d^2h)^2$	6.211,14	0,9521	19,21	44,45	6.278,67	0,9515	14,21	44,50
V7	Sin ponderar	6.918,19	0,9466	43,58	44,04	7.080,50	0,9454	41,37	44,43
V8	Sin ponderar	5.679,97	0,9561	0,00	42,06	5.870,30	0,9547	0,00	42,62
R1	—	0,0036	0,9484	46,2	—	0,0059	0,9149	90,14	—
R2	—	0,0040	0,9432	285,68	—	0,0066	0,9058	338,36	—
R3	—	0,0037	0,9472	103,84	—	0,0058	0,9181	0,00	—
R4	—	0,0035	0,9415	0,00	—	0,0058	0,9171	43,97	—

El análisis de multicolinealidad del modelo V5 indicó que dos de las variables incluidas, el diámetro al cuadrado (d^2) y la altura (h), presentaban índices de condicionamiento (14,6 y 29,9, respectivamente) superiores a los límites establecidos para no considerar que existan problemas en las estimaciones de los errores estándar de los parámetros, por tanto ambas variables fueron excluidas siendo la expresión reducida del modelo V5 similar a la del modelo V1.

Por último, en el modelo V6 la variable dh^2 fue excluida al no poderse rechazar la hipótesis nula de que el parámetro que la acompaña fuese significativamente diferente de cero. Además, el cálculo de los índices de condicionamiento mostró una multicolinealidad moderada (índice de condicionamiento de 18,9) para la variable h , lo que unido a la escasa aportación a la reducción del error del modelo que supone la inclusión de esta variable (el coeficiente de determinación ajustado sólo aumenta un 0,4%) llevó a la exclusión de esta variable, quedando el modelo V6 reducido a la expresión matemática del modelo V1.

Los resultados obtenidos al ajustar los modelos V7 y V8 no indicaron la necesidad de excluir ninguna variable, por lo que la elección de la mejor tarifa de cubicación de volumen total se reduce a la comparación de los modelos V1, V7 y V8. Los estadísticos de ajuste y validación de estos tres modelos aparecen reflejados en la Tabla 3.

Los valores de los estadísticos de los tres modelos, tanto en la fase de ajuste como en la de validación presentan pocas diferencias. El modelo que muestra una mayor exactitud es el V8, ya que presenta el mejor comportamiento para todos los estadísticos empleados en la comparación (menor valor del EMC, IF y Δ_{AIC} y un mayor valor del R^2_{Adj}) tanto en la fase de ajuste como en la de validación, por lo que se selecciona como tarifa de cubicación de volumen total para *Quercus robur* L. en Galicia. Como se puede observar en la gráfica izquierda de la Figura 1, los residuos resultantes de la aplicación de este modelo presentan una distribución bastante homogénea sin existencia de tendencias que puedan presuponer el incumplimiento de las hipótesis estructu-

**Figura 1.** Representación gráfica de los residuos frente a los valores predichos para el modelo V8 de volumen total (izquierda) y para el modelo de razón R3 (derecha).

rales del análisis de regresión. Al ser un modelo en el que la variable dependiente es el logaritmo natural del volumen, es necesario deshacer la transformación, por lo que la expresión definitiva del modelo es la siguiente:

$$V = c \cdot \exp(\beta_1) \cdot d^{\beta_2} \cdot h^{\beta_3} \quad [15]$$

donde V es el volumen total con corteza en dm^3 , d es el diámetro normal en cm, h es la altura total del árbol en m, β_i son los parámetros del modelo cuyo estimador, error estándar asociado y significación aparecen en la Tabla 4 y c es el factor corrector del sesgo cuyo valor se calcula empleando la ecuación [10].

Los valores de los parámetros (Tabla 4) son coherentes con el efecto que tiene cada variable en la estimación del volumen. El parámetro que acompaña al diámetro (β_2) es inferior al valor esperado de 2 mientras que el parámetro que acompaña a la altura (β_3) es ligeramente superior al valor lógico 1. Las diferencias observadas con respecto a los valores esperados se deben, probablemente, a la fuerte influencia que tiene la altura en los volúmenes de los árboles de esta especie por las grandes diferencias de forma que se observan debido a las distintas selviculturas que se llevan a cabo con la especie en Galicia (Barrio, 2003). La fuerte correlación entre los parámetros supone que un aumento de uno de ellos (el asociado a la altura) suponga una reducción del otro, aunque, su efecto combinado permite que las estimaciones de volumen sean precisas e insesgadas. Por otro lado, el valor conjunto del producto del factor corrector de sesgo y el término $\exp(\beta_1)$ se correspondería con el coeficiente mórico del árbol. Una vez realizadas las correcciones necesarias debidas a la diferencia de unidades entre variables se obtiene un valor para este coeficiente de 0,25, que está dentro de los valores observados para la especie en Galicia (Balboa, 2001; Tapia, 2002).

Los resultados de los ajustes de las ecuaciones de razón (modelos R1 a R4) se muestran en la Tabla 3. Se observa que todos los modelos empleados presentan unos valores bastante similares de los estadísticos de comparación, siendo ligeramente mejor el modelo R4 en la fase de ajuste, mientras que en la fase de validación destaca el modelo R3 (menores valores del Δ_{AIC} y mayores del R^2_{Adj} y de MEF_{Adj} , respectivamente). La inclusión de un término que tenga en cuenta la estructura del error mediante un modelo autorregresivo de orden 2 mejora sensiblemente los valores del estadístico de Durbin-Watson (DW) en todos los modelos, que pasan de ser claramente inferiores al valor óptimo de 2, que es el valor esperado cuando existe independencia de los errores, a valores comprendidos entre 1,90 y 2,04 que indican que no existen evidencias de problemas de autocorrelación.

Puesto que el modelo R4 incluye una variable más (altura total del árbol) que dificultaría su empleo y, además no aporta una mejora significativa de exactitud con respecto al modelo R3, se selecciona este último para su empleo en la construcción de la tarifa de cubicación con clasificación de productos. En la gráfica derecha de la Figura 1 se comprueba que los residuos resultantes del empleo del modelo R3 presentan una distribución sin tendencias anómalas que garanticen estimaciones precisas e insesgadas al emplearlo para la construcción de una tarifa con clasificación de productos. La expresión matemática de la ecuación de razón obtenida para *Quercus robur* en Galicia es la siguiente:

$$V_{iu} = V \cdot \exp(\beta_4 \cdot d_i^{\beta_5} \cdot d^{\beta_6}) \quad [16]$$

donde V es el volumen total con corteza en dm^3 , V_{iu} es el volumen total con corteza en dm^3 hasta un diámetro límite de utilización (d_i) expresado en cm, d es el

Tabla 4. Valores estimados, errores estándar y significación de los parámetros de los modelos seleccionados para la construcción de la tarifa con clasificación de productos

Modelo	Parámetros	Estimación	Error estándar	t valor	Significación
V8	β_1	-2,630852	0,085280	-30,85	<0,0001
	β_2	1,668566	0,033609	49,64	<0,0001
	β_3	1,141276	0,050557	22,57	<0,0001
	c	1,006986	—	—	—
R3	β_4	-0,45028	0,0365	-12,34	<0,0001
	β_5	4,39441	0,0536	82,02	<0,0001
	β_6	-4,0563	0,0552	-73,45	<0,0001
	ρ	0,628478	0,0186	33,81	<0,0001
	γ	0,580581	0,0179	32,51	<0,0001

diámetro normal también en cm y β_i son los parámetros del modelo cuyo estimador, error estándar asociado y significación aparecen reflejados en la Tabla 4.

Debe tenerse en cuenta que en la expresión definitiva del modelo R3 no se incluyen los valores de los parámetros de la estructura de autocorrelación del error ya que el principal propósito de su uso es la obtención de unos valores de los parámetros β_i insesgados y más eficientes. Además, en la práctica no se conocen los valores ε_{i-1} y ε_{i-2} sin el apeo de árboles y la obtención de trozas de distintas longitudes (Huang, 1997; Parresol y Vissage, 1998).

En la Figura 2 se presentan las curvas de razón de volumen (%) para diferentes valores del diámetro normal del árbol (d) y distintos diámetros límites de utilización (d_i) observándose una gran consistencia al no existir la posibilidad de cruce entre distintas curvas de volumen porcentual, lo que si podría ocurrir si se ajustan ecuaciones diferentes para cada diámetro límite de utilización.

Por último, en la Figura 3 se representan los valores reales de los volúmenes acumulados troza a troza para cada árbol utilizado en el ajuste de las ecuaciones frente al valor predicho por la tarifa con clasificación de productos. Sobre dicho gráfico se ha representado la recta de regresión $\text{Volumen observado} = a + b \cdot \text{Volumen predicho}$ y la recta $y = x$, no observándose entre ellas diferencias significativas que presupongan la existencia de sesgo en las estimaciones del volumen.

Conclusiones

En este trabajo se ha comprobado que la utilización de ecuaciones de cubicación de árbol individual de volumen total demasiado complicadas (incluyendo tér-

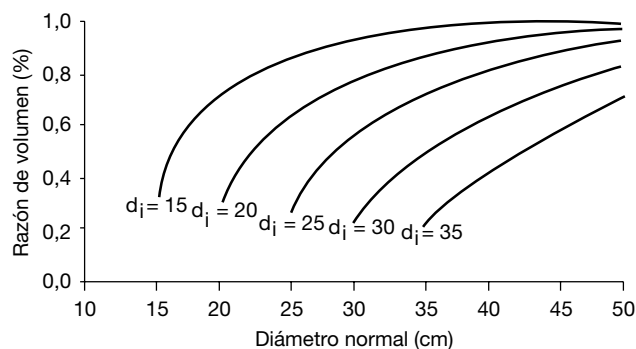


Figura 2. Razón de volumen para distintos diámetros límites de utilización (d_i) en cm.

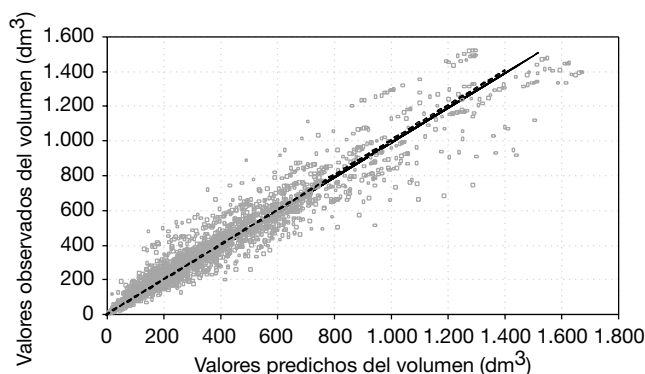


Figura 3. Representación de los valores reales de los volúmenes acumulados troza a troza para cada árbol frente a los valores predichos por la tarifa con clasificación de productos. La línea continua representa la recta de regresión $\text{Volumen observado} = a + b \cdot \text{Volumen predicho}$ y la línea discontinua la recta $y = x$.

minos polinómicos o productos cruzados de variables), no aportan nada nuevo a la explicación de la variabilidad del volumen; reduciéndose, de esta forma, el abanico de modelos a considerar para la construcción de tarifas de cubicación de volumen total a únicamente 3 modelos.

Puesto que los datos empleados para el ajuste del modelo de razón presentan dependencia espacial, al estar correlacionadas las diferentes mediciones llevadas a cabo en distintos puntos de un mismo tronco, ha sido necesario corregirla, comprobándose que, en este caso es suficiente con el empleo de un modelo autorregresivo de orden 2 para la estructura del error en el que se incluye la distancia espacial entre una medición y las dos anteriores en el mismo individuo.

El empleo de modelos de razón en la construcción de tarifas de cubicación con clasificación de productos cuenta con algunas ventajas como la sencillez de su ajuste y aplicación, además de proporcionar una gran exactitud en las estimaciones, por lo que se considera que esta metodología debe seguir siendo tenida en cuenta en el futuro, sobre todo en aquellas especies en las que la relación altura-diámetro, bien sea local o bien sea generalizada, no permita estimaciones precisas de la altura debido a los diferentes portes que adoptan los árboles en función de la selvicultura aplicada, lo que afectaría a las estimaciones de las funciones de perfil al incluir la altura como variable imprescindible.

Por último, hay que destacar que este tipo de herramientas se deben emplear para la cubicación de rodales por agregación de los volúmenes de los árboles individuales ya que de esta forma se compensan los errores derivados de su aplicación. Su empleo para es-

timar volúmenes de un número reducido de árboles puede provocar errores importantes en las estimaciones.

Agradecimientos

La obtención de los datos necesarios para la realización de este trabajo ha sido posible gracias a la financiación de la Xunta de Galicia a través de los proyectos de investigación: PGIDT99MA29101 «Estudio epidométrico de las masas de *Quercus robur* L. en Galicia y su influencia sobre la calidad de la madera» y PGIDIT02RFO29101PR «Estudio de modelos de clasificación visual de madera en pie en masas naturales de *Quercus robur* L. en Galicia».

Bibliografía

- ALDER D., 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento. Estudios FAO. MONTES 22/2. Roma.
- BALBOA M.A., 2001. Estudio de crecimiento y producción de las masas de *Quercus robur* L. en los municipios de A Consagrada y Ribeira de Piquín (Lugo). Proyecto fin de carrera. Universidad de Santiago de Compostela (inédito).
- BARRIO M., 2003. Crecimiento y producción de masas naturales de *Quercus robur* L. en Galicia. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela (Inédito).
- BASKERVILLE G.L., 1972. Use of logarithmic regression in the estimation of plant biomass. Can J For Res 2, 49-53.
- BELSEY D.A., 1991. Conditioning diagnostics, collinearity and weak data in regression. Wiley, New York.
- BI H., 2000. Trigonometric variable-form taper equations for Australian eucalypts. For Sci 46(3), 397-409.
- BURKHART H.E., 1977. Cubicfoot volume of loblolly pine to any merchantable top limit. South J Appl For 1(2), 7-9.
- BURNHAM K.P., ANDERSON D.R., 2000. Model selection and inference: a practical information-theoretic approach. Springer-Verlag.
- CAILLEZ F., 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. Vol 1. Estimación del volumen. FAO. Roma.
- CAO Q.V., BURKHART H.E., MAX T.A., 1980. Evaluation of two methods for cubic-foot volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. For Sci 26, 71-80.
- CASTEDO F., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., 2000. Construcción de una tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Pinus radiata* D. Don en Galicia basada en una función de perfil del tronco. Invest Agrar: Sist Recur For 9(2), 253-268.
- CLARK A., THOMAS C.E., 1984. Weight equations for southern tree species. When are and what is needed. En: DANIELS R.F., DUNHAN P.H. (Eds). Proceedings of the 1983 southern forest biomass workshop. Fifth annual meeting of the Southern Forest Working Group, 1983 June 15-17; Charleston, S.C. Asheville, N.C. USDA Forest Service. Southern Forest Experimental Station, 100-106.
- DAVIDIAN M., GILTINAN D.M., 1995. Nonlinear models for repeated measurement data. Chapman and Hall. London.
- DIGGLE P.J., HEAGERTY P.J., LIANG K.Y., ZEGER S.L., 2002. Analysis of longitudinal data. Oxford University Press.
- DRAPER N.R., SMITH H., 1998. Applied regression analysis. John Wiley & Sons.
- FURNIVAL G.M., 1961. An index for comparing equations used on constructing volume tables. For Sci 7(4), 337-341.
- GADOW K.V., REAL P., ÁLVAREZ GONZÁLEZ J.G., 2001. Modelización del crecimiento y la evolución de los bosques. IUFRO World Series Vol. 12. Vienna.
- GARBER S.M., MAGUIRE D.A., 2003. Modelling stem taper of three central Oregon species using mixed effects models and autoregressive error structures. For Ecol Manage 179, 507-522.
- GARCÍA O., 1995. Apuntes de mensura forestal I: Estática. Universidad Austral de Chile. Facultad de Ciencias Forestales.
- GONZÁLEZ DONCEL I., 1989. Tablas ponderales para la estimación de la biomasa de rebollo (*Quercus pyrenaica* Willd.) en la provincia de León. Comunicaciones INIA. Serie Recursos Naturales nº 50.
- GREGOIRE T.G., SCHABENBERGER O., BARRET J.P., 1995. Linear modelling of irregularly spaced, unbalanced, longitudinal data from permanent-plot measurements. Can J For Res 25, 137-156.
- HUANG S., 1997. Development of compatible height and site index models for young and mature stands within an ecosystem-based management framework. IUFRO Congress «Empirical and process-based models for forest tree and stand growth simulation». Oeiras, Portugal, pp. 61-99.
- HUANG S., YANG, Y., WANG, Y., 2002. A critical look at procedures for validating growth and yield models. Modelling Forest Systems (Eds A. Amaro, D. Reed and P. Soares). CAB Internacional, 271-293.
- KOZAK A., 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. Can. J For Res 27, 619-629.
- LINNELL A., 1996. Analysis of repeated measures and time series. An introduction with forestry examples. Working paper. British Columbia Ministry of Forests.
- LOETSCH F., ZÖRER F., HALLER K.E., 1973. Forest inventory. Vol. 2. BLV Verlagsgesellschaft mbH, München, Germany.
- LÓPEZ SÁNCHEZ C., GORGOSO VARELA, J., CASTEDO DORADO, F., ROJO ALBORECA, A., RODRÍGUEZ SOALLEIRO, R., ÁLVAREZ GONZÁLEZ, J.G., SÁNCHEZ RODRÍGUEZ F., 2003. Comparison of generalized height-diameter models for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). Ann For Sci 60, 237-245.
- MEYER H.A., 1944. A correction for systematic error occurring in the application of the logarithmic volume equation. Pennsylvania State University, Forest Research Paper 7.
- NÁVAR J., DOMÍNGUEZ P., 1997. Ajuste de modelos de volumen y funciones que describen el perfil diamétrico

- de cuatro especies de pino plantadas en el Nordeste de México. Invest Agrar: Sist Recur For 6(1-2), 147-163.
- NEWHAM, R.M., 1992. Variable-form taper functions for Alberta tree species. Can J For Res 22, 210-223.
- NÚÑEZ-ANTÓN V., ZIMMERMAN D.L., 2001. Modelización de datos longitudinales con estructuras de covarianza no estacionarias: modelos de coeficientes aleatorios frente a modelos alternativos. Qüestió 25(2), 225-262.
- PARRESOL B.R., HOTVEDT J.E., CAO Q.V., 1986. A volume and taper prediction system for bald cypress. Can J For Res 17, 250-259.
- PARRESOL B.R., VISSAGE J.S., 1998. White pine site index for southern forest survey. Research paper. USDA Forest Service.
- PEÑA D., 1995. Estadística. Modelos y métodos. Modelos lineales y series temporales. 2ª edición. Alianza Universidad, Madrid, 754 pp.
- PINHEIRO J.C., BATES D. M., 2000. Mixed models in S and S-PLUS. Springer, New York.
- PRETZSCH H., BIBER P., ĎURSKÝ J., von GADOW K., HASENAUER H., KÄNDLER G., KENK G., KUBLIN E., NAGEL J., PUKKALA T., SKOVSGAARD J.P., SODTKE R., STERBA H., 2002. Recommendations for standardized documentation and further development of forest growth simulators. Forstwissenschaftliches Centralblatt 121, 138-151.
- PRODAN M., PETERS R., COX F., REAL P., 1997. Mensura Forestal. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA). Costa Rica.
- REED D., GREEN E., 1984. Compatible stem taper and volume ratio equations. For Sci 30(4), 977-990.
- RODRÍGUEZ F., MOLINA, C., 2003. Análisis de modelos de perfil del fuste y estudio de la cilindridad para tres clones de chopo (*Populus x euramericana*) en Navarra. Invest Agrar: Sist Recur For 12(3), 73-85.
- RONDEUX J., 1993. La mesure des arbres et des peuplements forestiers. Les Presses Agronomiques de Gembloux.
- RYAN T.P., 1997. Modern regression methods. John Wiley & Sons, Inc.
- SAS INSTITUTE INC., 2001a. SAS/STAT™ User's Guide, Release 8.2, Cary, N.C. USA.
- SAS INSTITUTE INC., 2001b. SAS/ETS™ User's Guide, Release 8.2, Cary, N.C. USA.
- SOARES P., TOMÉ M., 2002. Height-diameter equation for first rotation eucalypt plantations in Portugal. For Ecol Manage 166, 99-109.
- SPURR S.H., 1952. Forest Inventory. The Ronald Press Company. New York.
- STERBA H., 2001. Forest growth modelling. Curso impartido en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Madrid.
- TAPIA F., 2002. Estudio de crecimiento y producción de las masas de *Quercus robur* L. en los municipios de Baleira, Castroverde y Pol (Lugo). Proyecto fin de carrera. Universidad de Santiago de Compostela (inédito).
- TASSISA G., BURKHART H.E., 1998. An application of mixed effects análisis to modeling thinnings effects on stem profile of loblolly pine. For Ecol Manage 103, 87-101.
- TOMÉ M., RIBEIRO F., SOARES P., 2001. O modelo Globulus 2.1. Universidad Técnica de Lisboa-ISA. GIMREF.
- TRINCADO G., von GADOW K., SANDOVAL V., 1997. Estimación de volumen comercial en latifoliadas. Bosque 18(1), 39-44. Chile.
- VALDEZ J.R., LYNCH T.B., 2000. Ecuaciones para estimar volumen comercial y total en rodales aclareados de pino patula en Puebla, México. Agrociencia 34, 747-758.
- VAN DEUSEN P.C., SULLIVAN A.D., MATNEY T.G., 1981. A prediction system for cubic foot volume of loblolly pine applicable through much of its range. South J Appl For 5, 186-189.
- VERBEKE G., MOLENBERGHS G., 2000. Linear mixed models for longitudinal data. Springer series in statistics. Springer-Verlag. New York.
- WEST P.W., 1995. Application of regression analysis to inventory data with measurements on successive occasions. For Ecol Manage 71, 227-234.
- XUNTA DE GALICIA, 2001. O monte Galego en cifras. Dirección Xeral de Montes e Medio Ambiente Natural.
- XUNTA DE GALICIA, 2002. Anuario de estatística agraria 2000. Santiago de Compostela.
- ZEPEDA E.M., ALMONTE H., 1994. Sistema de cubicación para *Pinus patula* Schl. et Cham. de Chignahuapan, Puebla. Simposio y II reunión nacional de silvicultura y manejo de recursos forestales. Colegio de Postgraduados. Montecillo, Edo. de México.
- ZIMMERMAN D.L., NÚÑEZ-ANTÓN V., 2001. Parametric modelling of growth curve data: An overview. Test, Vol 10(1), 1-73.