Modelización de la distribución diamétrica de las masas de *Pinus pinea* L. de Valladolid (España) mediante la función Weibull

C. García Güemes [1] *, N. Cañadas [2], G. Montero [2]

[1] Servicio Territorial de Medio Ambiente. Junta de Castilla y León
C/ Juan de Padilla, s/n. 09071 Burgos.

[2] Dpto. de Selvicultura, CIFOR-INIA. Apdo. 811. 28080 Madrid.

Carlos.GarGue@bu.jcyl.es

RESUMEN

Se han obtenido modelos explicativos de los parámetros de la función Weibull biparamétrica para modelizar las distribuciones diamétricas en masas regulares de *Pinus pinea* L. en la provincia de Valladolid (España). A partir de datos experimentales tomados en 131 parcelas (20 árboles/parcela), se han determinado inicialmente los parámetros de la distribución teórica ajustada a las distribuciones reales mediante el método de los percentiles y regresión no lineal. A continuación se han ajustado modelos lineales predictivos de los parámetros calculados, que incluyen variables de masa. El parámetro «b» se asocia muy estrechamente con el diámetro medio cuadrático (d_g), mientras que el parámetro «c» presenta una mayor dificultad de ajuste, relacionándose con d_g y una segunda variable (edad o fracción de cabida cubierta).

Palabras clave: distribución diamétrica, función Weibull, modelos predictivos, *Pinus pinea.*

INTRODUCCIÓN

La modelización de las distribuciones diamétricas es un campo que ha recabado la atención de los investigadores forestales en los últimos tiempos. Diversos autores como Ortega (1989), Erviti (1991), Álvarez (1997), Condés (1997), Espinel e*t al.* (1997) y Del Río (1998) han abordado el tema en España con profundidad. Existen diversas funciones bien conocidas que se pueden utilizar para modelizar distribuciones diamétricas, tales como A de Charlier, normal, Beta, Gamma, S_B de Johnson o Weibull, aunque recientemente Tang *et al.* (1997) han elaborado un modelo que proyecta distribuciones diamétricas basándose

* Autor para correspondencia
Recibido: 22-3-01
Aceptado para su publicación: 23-5-02

en la estructura actual observada y en parámetros de la masa futura obtenidos de modelos de masa sin asumir *a priori* ningún tipo de función de densidad previa, si bien este modelo sólo fue ensayado en masas jóvenes hiperdensas con elevada mortalidad natural.

Las distribuciones Weibull y S_B de Johnson son las empleadas con más éxito para modelizar distribuciones diamétricas (Gadow, 1984, *in* Vanclay, 1994), si bien algunos autores destacan la primacía de la función Weibull sobre las demás (Bailey y Dell, 1973). El adecuado comportamiento de esta última se debe, en parte, a la gran flexibilidad que proporcionan los parámetros. La función Weibull ha sido utilizada para modelizar distribuciones diamétricas en masas tanto regulares (Bailey y Dell, 1973; Rennolls *et al.*, 1985; Reynolds *et al.*, 1988; Borders *et al.*, 1987; Kilkki *et al.*, 1989; Maltamo *et al.*, 1995) como irregulares (Bailey y Dell, 1973; Khatouri y Dennis, 1990). En España esta función se ha utilizado de manera preferente.

Desde el punto de vista de la gestión forestal interesa conocer las distribuciones diamétricas de las masas futuras, para lo que se debe obtener una estimación de los parámetros de las funciones de distribución diamétrica. La estimación de estos parámetros se puede abordar desde dos ópticas diferentes (Vanclay, 1994; Del Río, 1998): modelos de recuperación de parámetros y modelos de predicción de parámetros. Los primeros se basan en relacionar determinadas variables de la masa futura con percentiles o momentos de la distribución diamétrica esperada, calculando los parámetros de dicha distribución diamétrica mediante cualquiera de los métodos ordinarios de recuperación de parámetros. Modelos de este tipo han sido utilizados por Borders *et al.* (1987), Pascoa (1987), Espinel *et al.* (1997) y Del Río (1998) entre otros.

Los modelos de predicción de parámetros, preferidos sobre los anteriores por Reynolds *et al.* (1988) por obtener mejores estimaciones al proyectar en el tiempo una distribución concreta, permiten obtener directamente los parámetros de las distribuciones futuras a partir de variables de masa proyectadas, mediante ecuaciones que relacionan cada parámetro con ellas. Se han utilizado por Rennolls *et al.* (1985) y posteriormente por Kilkki *et al.* (1989), Maltamo *et al.* (1995), García López (1995) y Álvarez (1997).

La estimación de los parámetros de las funciones de distribución diamétrica se realiza por tres métodos fundamentales: máxima verosimilitud, percentiles y momentos (Shiver, 1988). Los tres han sido frecuentemente utilizados, e incluso hay numerosos trabajos que recogen comparaciones entre ellos (Zarnoch y Dell, 1985; Shiver, 1988;...). En general, parece que los estimadores de mínima varianza son los obtenidos por el método de los percentiles, aunque su sesgo es considerablemente superior al método de máxima verosimilitud (Shiver, 1988; Lejeune, 1994). El método de los percentiles presenta la gran ventaja de su sencillez operativa, por lo que se ha utilizado prolijamente, bien como método para la obtención de los parámetros iniciales y posterior ajuste de la función mediante regresión no lineal, o directamente para la estimación de los parámetros definitivos.

La evaluación de la bondad del ajuste de la distribución diamétrica estimada a la distribución real se realiza mediante la aplicación de diversos tests. Reynolds *et al.* (1988) comparan los tests de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises y Anderson-Darling para comprobar la bondad del ajuste de la función Weibull a una serie de distribuciones diamétricas. Aunque los tres dan unos resultados similares, el más exigente en términos de proporción de parcelas rechazadas es el test de Anderson-Darling. Otros autores (como Ortega, 1989) también han utilizado la prueba clásica de la χ^2 de Pearson.

En este trabajo se utiliza la función Weibull, suficientemente contrastada en nuestro país, para modelizar la distribución diamétrica de las masas regulares de *Pinus pinea* L.

en Valladolid. Los parámetros de las distribuciones futuras se determinan con modelos de predicción de parámetros, de tal modo que puedan ser fácilmente estimados a partir de variables de masa.

MATERIAL Y MÉTODOS

Material

Los datos utilizados proceden de un muestreo dirigido de 131 parcelas circulares de 20 árboles sobre masas regulares en la provincia de Valladolid (España). El inventario se realizó cubriendo el más amplio rango posible de edad, densidad y calidad de estación. Los detalles sobre la materialización del inventario se pueden consultar en García Güemes y Montero (1998). La estratifiación según calidad de estación se realizó en base a las curvas anamórficas elaboradas por Pita (1966). Para la ejecución del muestreo se establecieron 3 clases de densidad en función del diámetro medio cuadrático (d_g) de la parcela, según el criterio de la Tabla 1.

Tabla 1

Clasificación cualitativa de la densidad de las parcelas de muestreo, en función de la densidad real (N) u del diámetro medio cuadrático (d_g)

d_g (cm)	N (pies/ha)		
	Baja	Media	Alta
< 10	< 600	650 - 850	> 900
10 - 15	< 500	550 - 650	> 700
15 - 20	< 400	450 - 550	> 600
20 - 25	< 275	300 - 400	> 425
25 - 30	< 225	250 - 325	> 350
30 - 35	< 175	200 - 225	> 275
35 - 40	< 125	150 - 175	> 200
40 - 45	< 100	125 - 150	> 165
45 - 50	< 85	100 - 125	> 140
50-55	< 70	80 - 100	> 115

En la Tabla 2 se incluyen unos datos descriptivos de las parcelas inventariadas, clasificadas por calidad de estación (según la clasificación realizada por García Güemes *et al.*, 1997) e intervalos de edad de 30 años.

Todos los análisis y ajustes estadísticos se realizaron con el programa SAS/STAT v. 6.0.

Tabla 2

Valores medios y desviaciones estándar del diámetro medio cuadrático (d_g), el área basimétrica (G) y la fracción de cabida cubierta (Fcc) de las parcelas muestreadas, clasificadas por calidades de estación e intervalos de edad de 30 años

Calidad	Edad (años)	d_g (cm)		G (m^2/ha)		Fcc (%)		N.º de parcelas
		Media	D. est.	Media	D. est.	Media	D. est.	
I	< 30	19,4	6,18	13,9	8,39	46,3	27,39	8
	30-60	40,3	2,35	35,9	13,30	66,9	18,46	3
	60-90	47,7	2,77	48,5	6,84	128,5	17,57	2
II	< 30	17,7	4,19	9,2	4,68	37,1	12,02	6
	30-60	36,9	7,31	21,1	10,99	53,9	18,89	12
	60-90	43,0	9,57	42,8	22,00	80,3	31,07	7
	> 90	42,0	2,71	25,7	12,00	59,6	25,64	2
III	< 30	13,9	3,33	9,4	3,82	37,3	14,19	10
	30-60	27,8	6,09	15,5	6,36	43,9	15,02	32
	60-90	39,0	4,20	23,2	15,52	55,1	25,89	13
	> 90	41,2	5,19	22,8	8,13	57,9	12,72	6
IV	< 30	13,5	4,55	8,1	3,18	27,0	9,53	4
	30-60	23,6	5,09	13,6	5,09	41,3	13,38	16
	60-90	30,5	4,49	19,3	5,39	49,0	16,28	8
	> 90	34,3	10,58	18,2	11,48	56,4	35,95	2

Métodos

Para la modelización de las distribuciones diamétricas se ha utilizado la función Weibull. La expresión de la función de densidad de Weibull es la siguiente:

$$f(x) = \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}}$$

en la que «a» es el parámetro que define el origen de la función, «b» es el parámetro de escala, cuyo valor se aproxima al percentil 63 (Bailey y Dell, 1973) y «c» el de forma. Todos ellos deben ser positivos y el diámetro x > «a».

La expresión integrada de la anterior función de densidad es la función de distribución siguiente:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}$$

El parámetro «c» es el responsable de la asimetría de la distribución diamétrica. Valores inferiores a 3,6 dan una asimetría positiva, y cuando son superiores a ese valor, la simetría es negativa. Para «c» = 3,6, la distribución weibull se convierte en una distribución normal.

Para estimar el parámetro «a» lo habitual es hacerlo coincidir con el diámetro mínimo (Pascoa, 1987), si bien Erviti (1991) fija su valor en 4,5 cm para todas las parcelas, mientras que Del Río (1998) lo hace corresponder con la mitad del diámetro mínimo de cada parcela inventariada. Diversos autores han empleado con éxito la función haciendo «a» = 0, con lo que se consigue la denominada función Weibull biparamétrica. Condés (1997) señala que los ajustes con la función Weibull biparamétrica no alcanzan la precisión adecuada cuando se trata de modelizar la distribución diamétrica de parcelas con diámetros medios elevados, situación que raramente se presenta en los pinares de *Pinus pinea* estudiados. Álvarez (1997), trabajando con *Pinus pinaster* en Galicia, utiliza la función de dos parámetros aduciendo menor dificultad en el ajuste y similar precisión, e incluso Maltamo *et al.* (1995) obtienen mejores resultados con la función de dos parámetros que con la de tres al elaborar modelos de predicción de los parámetros. García López (1995) también utiliza la función biparamétrica sobre *Pinus sylvestris* en el Sistema Central.

A la vista de los resultados obtenidos sobre otras especies, para el presente trabajo se ha utilizado la función Weibull biparamétrica. El procedimiento empleado para obtener funciones que permitan el cálculo de los parámetros de una distribución diamétrica tiene tres partes:

1. Estimación de parámetros y evaluación del ajuste de las distribuciones obtenidas con los parámetros estimados respecto a la distribución real muestreada, estableciendo clases diamétricas de 3 cm. La modelización de la distribución real se realiza con el método de los percentiles y mediante el ajuste no lineal DUD de la función de distribución, comprobando ambos resultados.
2. Ajuste de funciones para la predicción de los parámetros, en las que intervengan variables de masa.
3. Validación de los parámetros predichos con las funciones respecto a los estimados.

Estimación de los parámetros y bondad de los ajustes

La estimación de los parámetros se ha realizado por el método de los percentiles, cuya expresión es la siguiente (Dubey, 1967):

$$\ln b = \frac{\ln x_t - k \cdot \ln x_t}{1-k} \qquad k = \frac{\ln(-\ln(1-r))}{\ln(-\ln(1-t))}$$

$$c = \frac{\ln\left[\dfrac{\ln(1-r)}{\ln(1-t)}\right]}{\ln\left[\dfrac{x_r}{x_t}\right]}$$

donde «r» y «t» son el orden de los percentiles elegidos, y «x_r» y «x_t» el valor de la variable (el diámetro en este caso) para los percentiles «r» y «t», respectivamente.

Cuando el número de observaciones es elevado, los percentiles habitualmente utilizados son 17 % y 97 % (Álvarez, 1997). El ensayo realizado con estos percentiles resultó negativo porque la muestra se compone únicamente de 20 árboles en cada parcela, con lo que el percentil 97 corresponde prácticamente al diámetro superior inventariado. Este valor extremo del inventario puede no ser significativo del percentil considerado. Con menos frecuencia se utiliza otra pareja de percentiles, 40 % y 82 %, con la que algunos autores han conseguido ajustes más eficaces (Dubey, 1967). El hecho de que el valor superior de esta última pareja corresponda a una observación más centrada en la distribución permite pensar en una importante reducción del sesgo en casos, como el que nos ocupa, de muestras formadas por un número pequeño de observaciones.

Los tests más habituales para comprobar el ajuste de la distribución son el test de Kolmogorov-Smirnov y la prueba χ^2 de Pearson. Este último presenta como principal restricción la necesaria agrupación de los datos en, al menos, cinco clases, cada una preferiblemente con una frecuencia absoluta de al menos tres. Al constar la muestra de parcelas de 20 árboles, difícilmente se podrá sujetar la distribución diamétrica a la mencionada restricción, por lo que este método no puede ser utilizado en este caso. El test que se va a utilizar, por tanto, es el de Kolmogorov-Smirnov, que carece de las limitaciones del anterior, basado en la construcción del estadístico siguiente:

$$D_n = \sup|F_n(x) - F(x)|_i$$

es decir, para cada parcela «i» se debe obtener la máxima diferencia entre las frecuencias acumuladas del modelo y de la distribución real, que se ha construido en intervalos de 3 cm. El valor del estadístico D_n calculado se debe comparar con el tabulado. Condés (1997) afirma que el resultado de este contraste es excesivamente conservador, aunque ha sido utilizado y recomendado por otros autores como Ortega (1989), Erviti (1991) y Álvarez (1997).

Predicción de parámetros

Para predecir los parámetros se sigue una metodología análoga a la empleada por otros autores, como Rennolls *et al.* (1985) para la obtención de parámetros sobre 120 parcelas de *Picea sitchensis* y Álvarez (1997) para *Pinus pinaster* en Galicia. En primer lugar, se obtienen los coeficientes de correlación de Pearson entre las variables explicadas (parámetros «b» y «c») y las candidatas a variables explicativas (en este caso se han escogido d_g, edad, G, Fcc y densidad –N–), tanto por calidades de estación como para el conjunto de las parcelas. Asimismo, se realiza un análisis de factores principales que incluye a todas las variables anteriores.

Posteriormente se han efectuado regresiones lineales para poder predecir el valor de los parámetros «b» y «c» en función de diversas variables de masa, en concreto d_g, edad y Fcc.

Con vistas a poder realizar una posterior validación de los resultados obtenidos se han separado 21 parcelas, que representan de una manera relativamente homogénea la variabilidad de calidad de estación, edad y densidad. Estas 21 parcelas no han intervenido, pues, en el ajuste del modelo, que se ha realizado con las 110 parcelas restantes.

Validación

La validación de los resultados obtenidos se ha realizado considerando como observaciones reales los valores obtenidos por regresión lineal, que se han comparado con los valores estimados por los modelos de predicción.

RESULTADOS

Estimación de los parámetros y bondad de los ajustes

En una primera aproximación, se ajustó la función Weibull de dos parámetros a todas las parcelas, estimando los parámetros mediante el método de los percentiles. Para evaluar la bondad del ajuste de las distribuciones observadas a la función Weibull se utilizó el contrate de Kolmogorov-Smirnov. El nivel de significación utilizado en este contraste suele ser el 5 %, aunque diversos autores han trabajado con el 20 %, dando al contraste un mayor nivel de exigencia (Tabla 3). Bajo el criterio más exigente de los considerados, el 76 % de las parcelas responde adecuadamente al modelo propuesto.

Tabla 3

Parcelas rechazadas por la inadecuación de su distribución diamétrica a la función Weibull, para niveles de significación (α) del 5 % y del 20 %

α	Valor de corte	N.º de parcelas rechazadas	% rechazo
0,20	0,2320	31	24
0,05	0,2940	23	18

Las características de las parcelas rechazadas se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4

Calidad de estación y clase de edad de las parcelas que no siguen la distribución Weibull según el test de Kolmogorov-Smirnov

Calidad	N.º parcelas rechazadas	% rechazo	% total	Clase edad	N.º parcelas rechazadas	% rechazo	% total
I	2	6,4	9,9	0-20	7	22,6	21,4
II	3	9,7	20,6	20-60	18	58,1	48,1
III	15	48,4	46,6	60-100	5	16,1	22,9
IV	11	35,5	22,9	> 100	1	3,2	7,6

% total se refiere al conjunto de las parcelas.

Según se desprende de la Tabla 4, se observa una tendencia a peores ajustes cuanto peor es la calidad de estación: de las 31 parcelas rechazadas, 11 corresponden a la calidad IV. No se puede afirmar de manera rotunda que la variable «Edad» condiciona el desajuste de las parcelas a la función Weibull. De hecho, los valores extremos de edad parecen mostrar mejor ajuste que los valores medios (porcentaje de rechazo superior a la proporción del muestreo en el intervalo de 20 a 60 años).

Para valorar si existe algún rango de densidad que se ajusta peor a la función Weibull de dos parámetros, se agruparon las parcelas rechazadas en las clases cualitativas establecidas en la Tabla 1. El resultado se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5

Densidad cualitativa de las parcelas que no siguen la distribución Weibull según el test de Kolmogorov-Smirnov

Densidad	N.º parcelas rechazadas	% rechazo	% total
Baja	8	25,8	34,3
Media	17	54,8	38,9
Alta	6	19,4	26,7

% total se refiere al conjunto de las parcelas.

Como se aprecia en la Tabla 5, el análisis realizado considerando la densidad tampoco mostró ninguna tendencia significativa.

Con objeto de tener un mejor ajuste de la función calculada a los datos observados, se procedió a ajustar las distribuciones diamétricas a la función Weibull mediante regresión no lineal mediante el algoritmo DUD. En este caso, los parámetros estimados mediante el método de percentiles de la distribución se utilizaron como estimación inicial en la regresión no lineal. En el total de las 131 parcelas se consiguió la convergencia, con importantes reducciones en la suma del cuadrado medio de los residuos. En este caso, el número de parcelas rechazadas se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6

Parcelas rechazadas por la inadecuación de su distribución diamétrica a la función Weibull, para niveles de significación (α) del 5 % y del 20 %, tras realizar la regresión no lineal de la función Weibull respecto a las distribuciones observadas

α	Valor de corte	N.º de parcelas rechazadas	% rechazo
0,20	0,2320	21	16
0,05	0,2940	11	8

Las características de las parcelas rechazadas bajo el criterio más estricto (α = 0,20) se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7

Calidad de estación y clase de edad de las parcelas que no siguen la distribución Weibull según el test de Kolmogorov-Smirnov, tras realizar la regresión no lineal de la función Weibull respecto a las distribuciones observadas

Calidad	N.º parcelas rechazadas	% rechazo	% total	Clase edad	N.º parcelas rechazadas	% rechazo	% total
I	2	9,5	9,9	0-20	6	28,6	21,4
II	1	4,8	20,6	20-60	11	66,6	48,1
III	12	57,1	46,6	60-100	1	4,8	22,9
IV	6	28,6	22,9	> 100	0	0	7,6

% total se refiere al conjunto de las parcelas.

Se puede afirmar que se mantiene la tendencia apuntada con las parcelas rechazadas sin realizar el ajuste no lineal de los parámetros. En general, las categorías más representadas en el muestreo (calidad III y clase de edad 20-60) presentan porcentajes de rechazo ligeramente superiores a los que les correspondería si las parcelas rechazadas estuvieran aleatoriamente distribuidas en el espacio muestral.

De las 21 parcelas rechazadas tras la estimación de los parámetros con regresión no lineal, 19 pertenecen a la submuestra inicialmente tomada para realizar los ajustes y 2 a la submuestra separada para realizar la validación. Estas parcelas no se utilizan en los cálculos ulteriores, por lo que el ajuste se realizará con 91 parcelas y la validación con 19. De las 21 parcelas rechazadas, 7 sí eran aceptadas cuando se obtenían los parámetros con el método de los percentiles. Las características más relevantes de dichas parcelas se resumen en la Tabla 8.

Tabla 8

Características de las parcelas rechazadas efectuando la regresión no lineal y aceptadas con la estimación de parámetros por el método de los percentiles

Parcela	Calidad	H_0 (m)	Edad (años)	N (pies/ha)	d_g (cm)	G (m^2/ha)	Fcc (%)
26	IV	4,86	20	457	16,8	10,08	35,98
62	III	6,78	22	624	18,4	16,52	41,24
87	III	6,41	20	446	18,7	12,25	38,69
98	IV	7,85	83	146	28,1	9,01	18,85
113	IV	5,27	24	600	17,1	13,86	43,31
116	III	5,35	18	795	16,6	17,14	58,71
130	III	8,48	34	171	26,7	9,60	28,93

En todos los casos excepto uno se trata de parcelas jóvenes de las dos calidades inferiores. La parcela de mayor edad (83 años) tiene la notable particularidad de que su fracción de cabida cubierta no llega la 20 %, por lo que se puede pensar que se realizaron en su momento tratamientos selvícolas muy intensos que debieron modificar de forma significativa la distribución diamétrica inicial. Por otra parte, parece deducirse que la recuperación de parámetros con el método de los percentiles es comparativamente mejor en parcelas jóvenes.

Ajuste de funciones para los parámetros

Análisis de correlación lineal

Se han obtenido los coeficientes de correlación de Pearson entre los parámetros de la función Weibull («b» y «c») y determinadas variables de las masas inventariadas, tanto para el conjunto de las parcelas como por calidades de estación. Estos coeficientes se muestran en la Tabla 9.

Es llamativa la fuerte correlación lineal entre el parámetro «b», relacionado con la velocidad de crecimiento de la función, con d_g y, en menor grado, con H_0. Por el contrario, el parámetro «c», relacionado con la localización del punto de inflexión, no muestra correlaciones tan claras con ninguna de las variables de masa consideradas.

Análisis de factores principales

En la Tabla 10 se muestra el análisis de factores principales, que permite observar el grado de asociación de las diferentes variables analizadas.

Tabla 9

Coeficientes de correlación de Pearson entre variables de masa y los coeficientes de la función Weibull, para el conjunto de las calidades de estación (n = 110 parcelas), y para la calidad I (n = 11 parcelas), calidad II (n = 26 parcelas), calidad III (n = 49 parcelas) y calidad IV (n = 24 parcelas)

		Dg	N	H_0	Fcc	Edad	G	«b»
Todas calidades	«b»	0,99878***	–0,54883***	0,89735***	0,40450***	0,72748	0,48332***	1,00000
	«c»	0,54407***	–0,32101***	0,48318***	0,34817***	0,47081	0,33736***	0,52956***
Calidad I	«b»	0,99889***	–0,49274	0,98029***	0,60395*	0,86171	0,78937**	1,00000
	«c»	0,82416**	–0,41686	0,82056**	0,59497	0,92799***	0,54223	0,81400**
Calidad II	«b»	0,99942***	–0,45567*	0,87320***	0,20203	0,75903	0,26419	1,00000
	«c»	0,32889	0,05960	0,33035	0,27542	0,09869	0,22126	0,31752
Calidad III	«b»	0,99925***	–0,67417***	0,93966***	0,42058**	0,84206***	0,51433***	1,00000
	«c»	0,60807***	–0,37253**	0,59895***	0,48953***	0,50230***	0,50099***	0,59676***
Calidad IV	«b»	0,99609***	–0,65603***	0,90980***	0,43598*	0,83235***	0,51862**	1,00000
	«c»	0,52713***	–0,34779	0,38655	0,09388	0,59509**	0,22265	0,50127*

*** P[R=0]<0,001
** 0,01>P[R=0]>0,001
* 0,05>P[R=0]>0,01
(sin asteriscos) P[R=0]>0,05

Tabla 10

Análisis de factores principales tomando el conjunto de las observaciones (todas calidades) y estratificando las mismas por calidad de estación. En todos los casos se retienen dos factores

	Todas calidades		Calidad I		Calidad II		Calidad III		Calidad IV	
	Factor 1	**Factor 2**	**Factor 1**	**Factor 2**	**Factor 1**	**Factor 2**	**Factor 1**	**Factor 2**	**Factor 1**	**Factor 2**
d_g	0,944	–0,221	0,967	–0,167	0,880	–0,439	0,961	–0,195	0,960	–0,153
N	–0,463	0,763	–0,386	0,894	–0,073	0,943	–0,606	0,670	–0,637	0,501
H_0	0,937	0,070	0,990	–0,024	0,970	–0,052	0,958	–0,086	0,950	0,000
Fcc	0,618	0,725	0,755	0,618	0,608	0,762	0,590	0,731	0,592	0,742
Edad	0,785	–0,174	0,948	–0,022	0,882	–0,066	0,872	–0,116	0,897	–0,078
G	0,685	0,646	0,840	0,430	0,655	0,698	0,676	0,634	0,680	0,662
«b»	0,940	–0,215	0,966	–0,144	0,880	–0,441	0,957	–0,199	0,951	–0,150
«c»	0,646	–0,085	0,877	–0,154	0,396	0,082	0,717	0,152	0,567	–0,370
Var.	4,758	1,666	5,948	1,442	4,244	2,360	5,209	1,510	5,079	1,432

Var.: varianza retenida por cada factor.

El parámetro «b» se asocia en todas las situaciones y de forma rotunda con el factor 1, mientras que el parámetro «c» no se asocia claramente con ninguno de los dos factores retenidos en cada caso (se da una asociación poco clara con el factor 1).

Son dos las consecuencias inmediatas que se extraen de los análisis de correlación y de factores principales; por un lado, el parámetro «b» guarda una fortísima relación con d_g. Por otro, el parámetro «c» no muestra una tendencia clara a la vista de los resultados por calidades. Su varianza explicada por los factores retenidos es particularmente pobre en la calidad II, e insatisfactoria en la III y IV. Se procedió a la representación gráfica del factor contra todas las variables estudiadas para inferir algún tipo de relación no lineal, con resultado negativo en todos los casos.

Parámetro «b»

La fortísima correlación del parámetro con d_g indica que se debe ajustar una función del tipo $b = a_1 + a_2 \cdot d_g$. La estimación de los parámetros y su error, para el conjunto de las parcelas una vez extraídas las que se van a utilizar en la validación (n = 91) figura en la Tabla 11.

Tabla 11

Estimación de los parámetros y su error estándar en el modelo de predicción del parámetro «b» (MSE = 0,3046, R^2 = 0,9978)

Parámetro	Estimación	Error est.
a_1	–1,8790	0,1662
a_2	1,0476	0,0051

La varianza explicada por este modelo es tan elevada que no se ha creído conveniente realizar una estratificación según calidades para mejorar la precisión.

Para realizar la validación de este modelo se ha comprobado el ajuste de la predicción de observaciones futuras, que se corresponden con las parcelas no utilizadas en el ajuste. Para ello, se debe comprobar que la discrepancia entre los valores de «b» calculados por la regresión no lineal y los estimados por el modelo de la Tabla 11 es inferior a la amplitud del intervalo de confianza de la estimación (Tabla 12).

La única parcela cuyo valor estimado del parámetro presenta una diferencia superior a la aceptable es la parcela 100. Esta parcela, asignada a la calidad IV, tiene una altura dominante de 6,9 m y una edad de 73 años. Según el modelo de calidad de estación utilizado, deducimos que esta parcela se encuentra en el límite inferior de dicha calidad, representando, por tanto, un valor extremo dentro del universo muestreado.

El error medio cuadrático de las observaciones nuevas es el siguiente:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{i=19} (b_i - b_i^*)^2}{19} = 0{,}5124$$

Tabla 12

Diferencia (b-b*) entre los valores de «b» calculados por regresión no lineal (b) y los estimados por el modelo propuesto (b*), así como la amplitud del intervalo de confianza 95 % para este último (t · Sb*), para las parcelas utilizadas en la validación

Parcela	Calidad	Dg (cm)	N (pies/ha)	b	b*	b-b*	t·Sb*
4	II	50,3	87	50,6715	50,8305	–0,1590	1,1068
7	III	41,0	368	40,7789	41,1032	–0,3243	1,0936
13	III	37,1	127	37,1803	36,9582	0,2221	1,0904
24	IV	27,6	272	28,0677	27,0824	–0,9853	1,0886
31	IV	11,8	337	10,5591	10,5178	0,0413	1,1041
32	IV	28,7	164	27,7143	28,2353	–0,5211	1,0884
33	II	35,9	395	36,2173	35,7290	0,4883	1,0897
35	III	35,9	136	35,9947	35,7275	0,2672	1,0897
55	III	28,7	231	28,4160	28,1593	0,2567	1,0884
64	III	19,6	213	18,3701	18,6548	–0,2847	1,0936
68	II	27,0	334	25,6193	26,4478	–0,8285	1,0888
81	IV	39,6	149	39,8397	39,5784	0,2613	1,0923
85	III	36,7	293	36,9747	36,5263	0,4484	1,0902
90	III	38,6	147	39,0119	38,5357	0,4761	1,0915
95	II	18,1	349	17,2168	17,0506	0,1661	1,0953
100	IV	24,3	339	21,0943	23,5406	–2,4462	1,0900
108	I	19,8	481	18,4716	18,8889	–0,4173	1,0934
114	III	13,8	377	13,1247	12,6223	0,5023	1,1009
127	III	47,3	96	48,1173	47,6334	0,4839	1,1016

Este valor debe ser comparado con el error medio cuadrático de los residuos (estimador de la varianza de la regresión), que es 0,3047, inferior al error medio cuadrático de las observaciones. No obstante, en este último más de la mitad de la aportación corresponde a la parcela 100, valor extremo no representativo de las condiciones medias observadas.

Finalmente, el coeficiente de determinación de las observaciones no utilizadas en la estimación del modelo es:

$$R^2_{pred} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=19} (b_i - b_i^*)^2}{\sum_{i=1}^{19} (b_i - \bar{b}_i)^2} = 1 - \frac{9,73}{2.359,36} = 0,9959$$

Este valor es muy alto y similar al coeficiente de correlación de la regresión (0,9978). Podemos concluir que el modelo del parámetro «b» propuesto predice con similar precisión las observaciones utilizadas para la construcción del modelo y nuevas observaciones.

Parámetro «c»

En el análisis de factores principales (Tabla 10), el parámetro «c» se identifica de manera poco definida con el factor 1, mientras que la proyección sobre el eje identificado con el factor 2 es casi despreciable. Realizado el análisis por calidades, se revela que la proyección de «c» sobre el eje del factor 2 es nula en la calidad I, mientras que en resto de calidades tiene cierta importancia.

Para predecir valores esperados del parámetro «c» a partir de las variables consideradas, procedemos a escoger una variable asociada a cada factor que tenga una correlación más fuerte con el parámetro «c», con objeto de que la interacción entre ambas sea débil. A la vista de los análisis de correlación y de factores principales, las variables deben ser d_g (factor 1) y Fcc (factor 2). El análisis de varianza del modelo $c = a_1 + a_2 \cdot d_g + a_3 \cdot Fcc$ y el ajuste de los parámetros figuran en la Tabla 13.

Tabla 13

Estimación de los parámetros y su error estándar en el modelo de recuperación del parámetro «c» (MSE = 6,3948; R^2 = 0,3157)

Parámetro	Estimación	Error est.
a_1	2,766254	0,75234387
a_2	0,130257	0,02362484
a_3	0,019214	0,01096493

Los parámetros y el término independiente son estadísticamente significativos, aunque la variación de «c» explicada por el modelo tan sólo llega al 30 %. Realizando idéntica regresión pero estratificando los datos según calidades de estación, se reduce la significación de los parámetros, en particular del correspondiente a Fcc (a_3). La causa es que la variación del parámetro «c» no sigue ningún patrón homogéneo según las diferentes calidades.

A la vista del análisis de factores principales, se valoró la posibilidad de utilizar N como variable de ajuste en lugar de Fcc. No obstante, los análisis de varianza obtenidos al introducir N mostraban que no era significativa en ningún caso.

La pobre estimación del parámetro «c» impide realizar afirmaciones tajantes sobre su comportamiento. Se puede indicar, no obstante, que los valores de «c» se incrementan con Fcc y con d_g. Valores superiores a 3,6 generan distribuciones con asimetría negativa; por tanto, el plano definido por la ecuación:

$$3{,}6 = 2{,}77 + 0{,}13 \cdot d_g + 0{,}019 \cdot Fcc \Leftrightarrow 0{,}83 = 0{,}13 \cdot d_g + 0{,}019 \cdot Fcc$$

divide al espacio de soluciones entre aquellos pares de valores que provocan asimetrías positivas y negativas. Exceptuando algún caso con diámetros muy pequeños, las asimetrías estimadas siempre serán positivas, consecuencia en parte de las bajas densidades en la que se suelen encontrar las masas.

Debido a la imperfección del modelo para la predicción del parámetro «c» no procede realizar una validación del modelo, tal y como se ha realizado para el modelo de crecimiento y el parámetro «b».

La predicción de «c» en situaciones futuras topa con la dificultad de la estimación de Fcc, variable cuyo comportamiento es desconocido. Seleccionando en su lugar la edad, variable que presenta cierta asociación con el factor 2 ($c = a_1 + a_2 \cdot d_g + a_3 \cdot \text{Edad}$) el resultado de la regresión se muestra en la Tabla 14.

Tabla 14

Estimación de los parámetros y su error estándar en el modelo de recuperación del parámetro «c» (MSE = 6,473636, R^2 = 0,3072)

Parámetro	Estimación	Error est.
a_1	3,419931	0,71470056
a_2	0,116177	0,03195832
a_3	0,014428	0,01096633

El parámetro a_3 no es significativo al 95% de probabilidad.

El plano que divide el espacio de soluciones entre asimetrías positivas y negativas es:

$$3{,}6 = 3{,}42 + 0{,}116 \cdot d_g + 0{,}014 \cdot \text{Edad} \Leftrightarrow 0{,}18 = 0{,}116 \cdot d_g + 0{,}014 \cdot \text{Edad}$$

La práctica totalidad de los valores de «c» recuperados serán superiores a 3,6, por lo que las asimetrías serán negativas.

Se han ensayado modelos como el ajustado por Maltamo *et al.* (1995), tomando logaritmos de varias variables, con resultado siempre insatisfactorio.

DISCUSIÓN

Cantiani y Scotti (1988) proponen un modelo de crecimiento para *Pinus pinea* en el que modelizaban la distribución diamétrica encontrada. La frecuencia relativa obtenida para cada clase diamétrica es:

$$F(T+t,D) = F(T,D) - \frac{F(T,D)\cdot\Delta(T,D)}{d} + \frac{F(T,D-d)\cdot\Delta(T,D-d)}{d}$$

donde

F: frecuencias de las clases diamétricas.
T: edad inicial.
t: lapso tras el que desea conocer la distribución diamétrica.
D: diámetro de la clase considerada.
d: amplitud de clase diamétrica.

Para las selviculturas que proponen los autores anteriores, las asimetrías observadas en las distribuciones son siempre negativas, consecuencia de las claras por lo bajo que aplican en los diferentes regímenes selvícolas propuestos. El principal inconveniente de este método respecto a la generación de distribuciones diamétricas con funciones matemáticas es que, partiendo de una distribución inicial, para calcular las distribuciones esperadas a edades alejadas de esa inicial se producen unos errores que son acumulativos, tanto mayores cuanto más alejados estemos de la situación original. No obstante, se debe valorar el hecho de que este modelo sea el único hasta la fecha para obtener distribuciones diamétricas en *Pinus pinea.*

A pesar de que las claras por lo bajo parecen las más indicadas para *Pinus pinea* (Montero y Candela, 1997), lo que debe originar asimetrías negativas, en Valladolid se han encontrado asimetrías mayoritariamente positivas, incluso en parcelas con densidades aparentemente bajas. Estas asimetrías positivas, que se transmiten en el modelo predictivo de distribución diamétrica, puede estar originado por la distribución irregular de los árboles en las parcelas u otras condiciones de microestación.

El test de Kolmogorov-Smirnov rechaza un 16 % de las parcelas para α = 0,20 cuando los parámetros se estiman con regresión no lineal. Con la misma significación y modo de estimación de parámetros, Erviti (1991) encontró un porcentaje de rechazo similar (18 %) para *Pinus halepensis.* Al descender la exigencia del test hasta α = 0,05, el porcentaje de parcelas rechazadas baja al 8 %, mientras que Erviti (1991) sólo encontró un 4 % de desajustes. En nuestra estimación de los parámetros mediante el método de los percentiles, los desajustes llegan al 24 % y 18 %, para valores de α de 0,20 y 0,05, respectivamente. La pequeña diferencia de parcelas rechazadas al bajar la exigencia del test encontrada en los dos procedimientos ensayados puede estar debida a la inclusión de parcelas muy jóvenes, que no se ajustan adecuadamente al modelo de distribución independientemente del procedimiento utilizado. Erviti (1991) no utilizó parcelas juveniles en sus ajustes.

Con una metodología similar a la utilizada en este trabajo, Rennolls *et al.* (1985) obtuvieron para *Picea sitchensis,* con datos de 120 parcelas, una varianza explicada del 45,5 % para el modelo $b = a_1 + a_2 \cdot D_g$, muy por debajo del ajuste aquí obtenido. Estos autores conseguían aumentar la precisión de la estimación introduciendo en el modelo el diámetro mínimo inventariable. Sin embargo, Álvarez (1997) obtiene un R^2 = 0,999 con el mismo modelo aplicado a *Pinus pinaster* en Galicia, resultado que está en sintonía con lo obtenido en este trabajo.

Para la modelización de la distribución de la producción de miera en rodales de *Pinus pinaster,* Nanos (2001) emplea la función Weibull biparamétrica, encontrando que el parámetro «b» guarda una fortísima relación con la producción media. Este resultado parece confirmar que el citado parámetro guarda una estrecha relación lineal con el valor medio (aritmético o cuadrático) de la variable cuya distribución está siendo explicada por la función Weibull.

Kilkki *et al.* (1989) construyeron modelos de regresión lineal de los parámetros «b» y «c» de la función Weibull. En ambos casos, la variable de masa que explicaba una mayor variación de los parámetros es d_g. En el caso del parámetro «c», los autores también incluyeron otras variables como G y la edad, aunque no comentan la correlación entre el conjunto de las variables independientes. Maltamo *et al.* (1995) obtuvieron un coeficiente de correlación de 0,97 en un modelo de predicción de «b» a partir de la raíz cuadrada del diámetro cuadrático medio y del logaritmo de la edad. Por otra parte, García López

(1995) ajustó funciones lineales sin término independiente del tipo b = b ($d_g^{0,5}, d_g, d_g^2$) y c = c ($b^{0,5}$, $b^{2,5}$) por calidades de estación.

Bajo una perspectiva ligeramente diferente, Borders *et al.* (1987) ajustaron distintos percentiles de la distribución diamétrica con variables de masa. La variable que en todos los casos mostró una mayor significación fue el diámetro medio cuadrático. El inverso de la edad mostró cierta significación, pero únicamente en los percentiles 100 y 65.

En concordancia con los resultados del presente trabajo, la bibliografía consultada constata la preponderancia de d_g, casi con exclusividad, para explicar el parámetro «b». En general, los ajustes obtenidos ofrecen elevados coeficientes de determinación.

Por otra parte, el parámetro «c» aumenta con la intensidad de las claras por lo bajo cuando la selvicultura desarrollada en una región geográfica presenta una homogeneidad de criterios dilatada en el tiempo. En la práctica, esta situación se puede considerar excepcional debido a la notable rotación de personal en los servicios forestales, que actúan con criterios selvícolas diferentes. Sólo en las parcelas experimentales de claras, donde a lo largo del tiempo se tiene un criterio fijo de intervención selvícola, se puede observar de manera diáfana la evolución esperada del parámetro «c» (Del Río, 1998), aumentando claramente conforme se intensifica el tratamiento.

En masas con densidad elevada existen unos pocos individuos cuyos diámetros se destacan de la media debido a condiciones microecológicas (mayor profundidad puntual de suelo, menor densidad puntual,...). Conforme las densidades se van haciendo progresivamente menores, estas ventajas locales tienen, en teoría, menos importancia al disminuir la competencia entre individuos, por lo que hay una mayoría de individuos que presentan diámetros correspondientes a las clases superiores de la distribución diamétrica.

Rennolls *et al.* (1985) ajustaron una ecuación parabólica en función exclusivamente del diámetro, explicando únicamente el 5 % de la variación total del parámetro. Al menos teóricamente, parece que en el ajuste del parámetro «c» debe entrar algún parámetro indicativo de la espesura de la masa, ya que su evolución esperada está condicionada por ésta.

Maltamo *et al.* (1995) consiguieron explicar el 31 % de la variación observada en un modelo lineal del tipo:

$$\ln c = a_1 + a_2 \cdot d_g^2 + a_3 \cdot \ln t$$

donde

a_i: parámetros
t: edad

Tampoco introdujeron ningún parámetro que pudiera absorber parte de la variación debida a la diferente intensidad de las intervenciones selvícolas, seguramente porque no presentaría significación alguna. En consonancia con los resultados obtenidos en este trabajo, la precisión del ajuste de este parámetro está lejos de lo deseable. Estos autores no discuten los posibles motivos de la dificultad de ajuste del parámetro «c», aunque podrían ser similares a las conjeturadas para nuestro caso, ya que los datos de partida corresponden al 7.º Inventario Forestal Finlandés, y podemos suponer una multiplicidad de situaciones y selviculturas aplicadas en el espacio y en el tiempo.

Finalmente, Álvarez (1997) consigue explicar el 90 % de la variación de «c» en función del inverso del logaritmo del cociente entre el cuartil del 25 % y d_g. La introducción de algún cuartil en la predicción de «c» debe mejorar necesariamente su estimación, debido a que el propio cuartil es un indicador de la forma que tiene la función de distribución.

En nuestro caso, no es factible la utilización de esta variable por no poder conocer *a priori* el valor del cuartil 25 % de la distribución diamétrica futura, aunque sí puede ser utilizado para determinar las distribuciones de las masas inventariadas.

CONCLUSIONES

La regresión no lineal (algoritmo DUD) permite obtener en la mayoría de los casos ajustes más precisos a la función Weibull biparamétrica de los parámetros de las distribuciones diamétricas inventariadas que el método de los percentiles.

El método de los percentiles permite obtener mejores ajustes únicamente en las parcelas jóvenes.

El parámetro «b» está íntimamente relacionado con el diámetro medio cuadrático (d_g), pudiéndose estimar de manera muy precisa con una función lineal que relaciona ambas variables.

Existe un importante porcentaje de variación del parámetro «c» que no es absorbido por el modelo lineal que lo relaciona con d_g y la edad.

SUMMARY

Modelization of diameter distribution of *Pinus pinea* L. stands in Valladolid (Spain) using Weibull function

Models for predicting parameter behaviour in the 2-parameter Weibull function in even-aged *Pinus pinea* stands of Valladolid (Spain) have been adjusted. From data out of 131 plots (20 trees per plot), real distribution parameters have been adjusted, using the percentile method, as well as non-linear regression. Next, predictive models of calculated parameters were adjusted, using stand variables. Parameter «b» is deeply related to mean cuadratic diameter (d_g), while parameter «c», which was more difficult to model, is related to d_g and other variable (Age or Canopy cover).

Key words: diameter distribution, Weibull function, predictive models, *Pinus pinea*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁLVAREZ J.G., 1997. Análisis y caracterización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait. en Galicia. Tesis Doctoral. ETSIM-UPM. Madrid. 269 pp.

BAILEY R.L., DELL T.R., 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. Forest Science 19, 97-104.

BORDERS B.E., SOUTER R.A., BAILEY R.L., WARE K.D., 1987. Percentile-based distributions characterize forest stand tables. Forest Science 33(2), 570-576.

CANTIANI M.G., SCOTTI R., 1988. Le fustaie coetanee di pino domestico del litorale tirrenico: studi sulla dinamica de accrescimiento in funzione di alcune ipotesi selvicolturali alternative. Annali dell Istituto Sperimentale per L'Assestamento Forestale e per L'Alpicoltura 11, 1-54.

CONDÉS RUIZ S., 1997. Simulación de parcelas arboladas con datos del Segundo Inventario Forestal Nacional. Tesis Doctoral. ETSIM-UPM. Madrid. 616 pp.

DEL RÍO M., 1998. Régimen de claras y modelo de producción para *Pinus sylvestris* L. en los Sistemas Central e Ibérico. Tesis Doctoral. ETSIM-UPM. Madrid. 219 pp.

DUBEY S.D., 1967. Some percentil estimators for Weibull parameters. Technometrics 9, 119-129.

ERVITI ANAUT J.J., 1991. Desarrollo de modelos de crecimiento y producción de las masas forestales de *Pinus halepensis* Mill. en España. Tesis Doctoral. ETSIM-UPM. Madrid. 314 pp.
ESPINEL S., CANTERO A., SÁENZ D., 1997. Un modelo de simulación para rodales de *Pinus radiata* en el País Vasco. Montes 48, 34-38.
GARCÍA GÜEMES C., CAÑADAS N., MONTOTO R., MONTERO G., 1997. Modelo de calidad de estación para *Pinus pinea* aplicando la ecuación de Richards. II Congreso Forestal Español, I Congreso Forestal Hipano-Luso. Tomo IV, pp. 267-272.
GARCÍA GÜEMES C., MONTERO G., 1998. Influencia de ciertas variables selvícolas en la pudrición provocada por *Phellinus pini* sobre *Pinus pinea.* Investigacion Agraria, Sist. Recur. For., 7 (1-2), 203-217.
GARCÍA LÓPEZ J.M., 1995. Evolución de estructura en masas ordenadas de *Pinus sylvestris* L. Ensayo de un modelo descriptivo. Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales n.º1, 399-414.
KHATOURI M., DENNIS B., 1990. Growth and yield model for uneven-aged *Cedrus atlantica* stands in Morocco. Forest Ecology and Management 36, 235-266.
KILKKI P., MALTAMO M., MYKKÄNEN R., PÄIVINEN R., 1989. Use of the Weibull function in estimating the basal area dbh-distribution. Silva fennica 23(4), 311-318.
LEJEUNE P., 1994. Construction d'un modèle de répartitioon des arbres par classes de grosseur pour des plantations d'epicéa commun *(Picea abies* L.) en Ardenne belge. Ann. Sci. For. 51, 53-65.
MALTAMO M., PUUMALAINEN J., PÄIVINEN R., 1995. Comparison of beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies.* Scandinavian Journal of Forest Research 10, 284-295.
MONTERO G., CANDELA J.A., dirs., 1997. Manual de claras para repoblaciones de *Pinus pinea* L. Ed. por EGMASA y Junta de Andalucía. 47 pp.
NANOS N., 2001. Variabilidad y modelización geoestadística de la producción de resina y madera de *Pinus pinaster* Ait. en los montes de Segovia. Tesis Doctoral. ETSIM-UPM. Madrid.
ORTEGA A., 1989. Modelos de evolución de las masas de *Pinus sylvestris* L. Tesis Doctoral. ETSIM-UPM. Madrid. 241 pp.
PASCOA F., 1987. Estrutura, crecimento e produçao em povoamentos de pinheiro bravo. Um modelo de simulaçao. Tesis Doctoral, Universidade Tecnica de Lisboa. 241 pp.
PITA P.A. 1966. Clasificación provisional de calidades de estación en las masas de pino piñonero. Anales del Instituto Forestal de Investigaciones y Experiencias: 172-182.
RENNOLLS K., GEARY D.N., ROLLINSON T.J., 1985. Characterizing diameter distribution by the use of the Weibull distribution. Forestry 58 (1), 57-66.
REYNOLDS M., BURK T., HUANG W., 1988. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. Forest Science 34(2), 373-399.
SHIVER B., 1988. Sample sizes and estimation methods for the Weibull distribution for unthinned Slash pine plantation diameter distributions. Forest Science 34(3), 809-814.
TANG S., WANG Y., ZHANG L., MENG C., 1997. A distribution-independent approach to predicting stand diameter distribution. Forest Science 43(4), 491-500.
VANCLAY J.K., 1994. Modelling forest growth and yield. Application to mixed tropical forest. CAB International. Wallinford. 238 pp.
ZARNOCH S., DELL T., 1985. An evaluation of percentile and maximum likelihood estimators of Weibull parameters. Forest Science 31, 260-268.