

# ANÁLISIS Y MODELIZACIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS DE *PINUS PINASTER* AIT. EN GALICIA

**J. G. ALVAREZ GONZALEZ**

**A. D. RUIZ GONZALEZ**

Escuela Politécnica Superior de Lugo  
Campus Universitario. 27002 Lugo

## RESUMEN

Se han ajustado cinco funciones de densidad ("A" de Charlier, Weibull, Pearl-Reed,  $S_B$  de Johnson y Gamma) a un total de 454 distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait en Galicia y se ha comparado el comportamiento de cada una de esas funciones mediante el test de Kolmogorov-Smirnov con el propósito de determinar la función que mejor se adapta a la forma de las distribuciones diamétricas de la especie. Posteriormente, se han obtenido ecuaciones que relacionan los parámetros de las funciones de densidad "A" de Charlier, Weibull y Gamma con las variables de masa, lo que permite la estimación de las distribuciones diamétricas futuras de la masa a partir de los valores de dichas variables obtenidas directa o indirectamente de unas tablas de producción.

**PALABRAS CLAVE:** Distribución diamétrica  
*Pinus pinaster*  
"A" de Charlier  
Weibull  
Gamma

## INTRODUCCION

La predicción del número de pies que dentro de cada clase diamétrica tendrá una masa determinada sometida a una cierta selvicultura es una herramienta de primer orden para la gestión forestal. Las dimensiones de un árbol, fundamentalmente su diámetro, determinan en gran medida la finalidad a la que se destinará su madera, y por tanto, el precio que de ella se pueda obtener. Por otro lado, las distribuciones diamétricas son particularmente importantes por su estrecha relación con las distribuciones volumétricas y porque el diámetro es una variable cuya medición es más sencilla que la de la altura. Además, el diámetro de los árboles que constituyen una masa es un factor determinante del tipo de maquinaria más adecuada para su aprovechamiento y sobre todo de su productividad.

En este trabajo se analiza el empleo de cinco funciones de densidad como modelos de distribuciones diamétricas y se discuten sus propiedades y ventajas. Finalmente, se ajustan relaciones que permiten construir tablas de rodal empleando la metodología de predicción de los parámetros para las funciones de densidad "A" de Charlier, Weibull y Gamma.

---

Recibido: 11-5-98

Aceptado para su publicación: 6-8-98

El fin perseguido es continuar avanzando en el desarrollo del modelo de crecimiento y producción que para la especie existe en Galicia (Rodríguez Soalleiro *et al.*, 1994), incorporando al mismo una nueva herramienta, la distribución de los pies por clases diamétricas, que permita al gestor realizar la toma de decisiones con un mayor conocimiento de causa.

## MATERIAL Y METODOS

Los datos de partida provienen de 112 parcelas de ensayo instaladas en masas regulares distribuidas por toda la geografía de Galicia (26 en La Coruña, 20 en Lugo, 35 en Orense y 31 en Pontevedra). Cada una de estas parcelas fue inventariada entre una y cuatro veces y se obtuvieron un total de 454 distribuciones diamétricas. La Tabla 1 muestra los valores medio, máximo y mínimo de las principales variables de masa del dispositivo de parcelas utilizado.

**TABLA 1**  
**PRINCIPALES PARAMETROS DE MASA DE LAS PARCELAS UTILIZADAS**  
*Principal stand parameters of sample plots*

	Edad	Densidad (pies/ha)	Diámetro medio cuadrático (mm)	Area basimétrica (m <sup>2</sup> /ha)	Altura dominante (dm)	Indice de sitio*	Fracción de cubida cubierta (%)
<b>Media</b>	19	1.672	161	30,01	114,08	127,7	96,7
<b>Máximo</b>	50	4.642	350	72,48	245,8	218,9	200,4
<b>Mínimo</b>	8	363	52	5,24	45,52	67,2	43,7

\* Calculado con el programa PINASTER (Rodríguez Soalleiro *et al.*, 1994)

El tamaño de las clases diamétricas se fijó en 1 cm. al ser este un valor que permite, por un lado, tener un mínimo de diez clases en cada distribución para poder realizar un ajuste adecuado y, por otro lado, no provoca una dispersión excesiva de los datos que redonde negativamente en la bondad de dicho ajuste.

Para caracterizar las distribuciones diamétricas se han seleccionado cinco de las funciones de densidad o distribución más utilizadas y aceptadas para la modelización en masas regulares: la función "A" de Charlier, la función de Weibull, la ecuación de Pearl-Reed, la función  $S_B$  de Johnson y la función Gamma.

### La función de densidad "A" de Charlier

Charlier consideró que era posible representar cualquier distribución de frecuencias basándose en dos funciones obtenidas por métodos distintos: la primera función, a la que denominó tipo "A" se genera a partir de una secuencia derivada de la distribución normal;

la segunda función, denominada tipo “B” se obtiene por una generalización de la función exponencial de Poisson.

Estas ecuaciones fueron utilizadas por primera vez en el campo forestal en los estudios de distribuciones diamétricas realizados en Estados Unidos por Schnur (1934).

La expresión general de la función de densidad “A” de Charlier es la siguiente:

$$y = Nt [h(x) + \beta_3 h^{III}(x) + \beta_4 h^{IV}(x)] \quad [1]$$

Donde “y” es el número de árboles por hectárea que pertenecen a la clase diamétrica cuyo centro es “x” y cuyo tamaño es “t”; “N” es la densidad de la masa en pies/ha; “h(x)” es la función de densidad de la distribución normal; “h<sup>III</sup>(x)” y “h<sup>IV</sup>(x)” son la tercera y cuarta derivada de dicha función de densidad; y “β<sub>3</sub>” y “β<sub>4</sub>” son los coeficientes de asimetría y kurtosis de Charlier.

$$\beta_3 = - \frac{m_3}{6\sigma^3} \quad \beta_4 = \frac{1}{24} \left( \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \right)$$

Siendo “m<sub>i</sub>” el momento de orden “i” con respecto al diámetro medio y “σ” es la desviación típica de los diámetros.

El ajuste se ha realizado de dos maneras: por una parte obteniendo directamente los valores de los coeficientes de asimetría y kurtosis y por otra ajustando la ecuación por mínimos cuadrados a cada distribución.

### La función de distribución de Weibull con dos parámetros

Fisher, Tippet presentaron en 1928 una nueva distribución de probabilidad que posteriormente fue obtenida de forma independiente en 1939 por Weibull en unos ensayos de resistencia de materiales. Esta función no fue empleada en el campo forestal hasta que Bailey, Dell (1973) la propusieron para modelizar distribuciones diamétricas.

La expresión de esta función de distribución es la siguiente:

$$Y = N t \left( 1 - e^{-\left(\frac{x - a_3}{a_1}\right)^{a_2}} \right) \quad [2]$$

Donde “Y” es en este caso el número de árboles que pertenecen a la clase diamétrica de centro “x” o a cualquier otra inferior; “t” es el tamaño de clase; “N” es la densidad; “a<sub>1</sub>” es un parámetro de escala; “a<sub>2</sub>” es un parámetro de forma; y “a<sub>3</sub>” es un parámetro de situación que en la curva teórica se corresponde con el valor mínimo del diámetro.

En el desarrollo de este trabajo se ha considerado un valor mínimo del diámetro igual a cero, por lo que se prescinde del parámetro de situación, facilitando el ajuste sin afectar negativamente a su bondad (Maltamo *et al.*, 1995; Alvarez González, Gadow, 1998).

El ajuste de esta función se ha realizado por dos procedimientos diferentes: en primer lugar, se estimaron los parámetros por el método de máxima verosimilitud de Cohen (1965) y, en segundo lugar, se utilizó el algoritmo iterativo DUD (Ralston, Jenrich, 1978) del programa SAS/STAT™ empleando como valores de partida las estimaciones obtenidas con la primera metodología.

### La ecuación de crecimiento de Pearl-Reed

En 1935 Osborne, Schumacher emplearon por primera vez esta ecuación de crecimiento para describir curvas de frecuencias relativas acumuladas de distribuciones diamétricas de masas regulares. La curva de crecimiento de Pearl-Reed viene dada por la ecuación:

$$Y = N t \left( \frac{1}{1 + e^{\log(m) + a_1 x_{sp} + a_2 x_{sp}^2 + a_3 x_{sp}^3}} \right) \quad [3]$$

Siendo “y” el número de árboles que pertenecen a la clase diamétrica cuyo extremo superior es “x<sub>sp</sub>” y cuyo tamaño es “t”; “m”, “a<sub>1</sub>”, “a<sub>2</sub>” y “a<sub>3</sub>” son los parámetros a determinar en el ajuste.

El ajuste de esta ecuación se ha realizado por mínimos cuadrados puesto que la función es linealizable.

### La función de densidad S<sub>B</sub> de Johnson

La función de densidad S<sub>B</sub> fue propuesta por Johnson en 1949 para modelizar distribuciones de frecuencias, pero hasta 1977 no fue aplicada a las distribuciones diamétricas (Hafley, Schreuder, 1977).

La ecuación que predice el número de árboles “y” que existe en la clase diamétrica de tamaño “t” y cuyo centro es “x” viene dada por:

$$y = N t \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{\lambda x - x^2} e^{-\frac{1}{2} \left[ a_2 + a_1 \log \left( \frac{x}{\lambda - x} \right) \right]^2} \quad [4]$$

Donde “N” es la densidad de la masa es pies/ha; “λ” es el recorrido o rango de cada distribución diamétrica; y “a<sub>1</sub>” y “a<sub>2</sub>” son parámetros a determinar en el ajuste, cumpliéndose que a<sub>1</sub> > 0, λ > 0, -∞ < a<sub>2</sub> < ∞.

Al igual que ocurría con la función de distribución de Weibull esta ecuación no es lineal por lo que para iniciar el procedimiento iterativo de ajuste (DUD) es necesaria una estimación previa de los parámetros; en este caso se han obtenido por el método de los percentiles de Knoebel, Burkhart (1991).

### La función de densidad Gamma

La función de densidad Gamma viene dada por la siguiente ecuación:

$$y = N t \frac{x^{(a_1 - 1)} a_2^{a_1}}{\Gamma(a_1)} e^{-x a_2} \quad [5]$$

Donde “y” es el número de árboles de la clase diamétrica de centro “x”; “t” es el tamaño de clase; “N” es la densidad en pies/ha; “a<sub>1</sub>” es un parámetro de forma; y “a<sub>2</sub>” es un parámetro de escala cumpliéndose que a<sub>1</sub> > 0 y a<sub>2</sub> > 0

$\Gamma(a_1)$  es la función Gamma cuya expresión es:

$$\Gamma(a_1) = \int_0^{\infty} x^{a_1-1} e^{-x} dx$$

Los valores iniciales de los parámetros empleados en el procedimiento iterativo de ajuste (DUD) se han obtenido siguiendo la metodología propuesta por Wilk *et al.* (1962) que se basa en el empleo de la función de máxima verosimilitud.

El principal inconveniente de esta función es que no se adapta a distribuciones con asimetría negativa o hacia la izquierda (Hafley, Schreuder, 1977), por lo que su comportamiento va a ser analizado tanto para el conjunto total de distribuciones como para las 268 que presentan asimetría positiva.

Una vez obtenidos los ajustes se comprobaron las hipótesis de partida de normalidad, homogeneidad de varianza e independencia de errores mediante el análisis de los residuos (Alder, 1980). La bondad de los ajustes se comprobó mediante el test de Kolmogorov-Smirnov fijando como nivel de significación el 20 p. 100, valor utilizado en la mayor parte de los trabajos de similares características (Little, 1983; Erviti, 1991).

## RESULTADOS Y DISCUSION

### Caracterización de las distribuciones diamétricas de *P. pinaster* en Galicia

La Tabla 2 muestra el número de ajustes rechazados por el test de Kolmogorov-Smirnov y el porcentaje que representan sobre el total para cada una de las funciones analizadas y las diferentes metodologías empleadas en su ajuste.

**TABLA 2**

#### RESULTADOS DE LOS AJUSTES DE LAS CINCO FUNCIONES ANALIZADAS

*Results of the five fitted functions*

Función	Metodología	N.º ajustes rechazados por el test de Kolmogorov-Smirnov ( $\alpha = 0,20$ )	% sobre total de ajustes
<b>“A” de Charlier</b>	Coefficientes de Charlier	8	1,76
<b>“A” de Charlier</b>	Mínimos cuadrados	1	0,22
<b>Weibull</b>	Máx. verosim. (Cohen)	251	55,28
<b>Weibull</b>	Ajuste no lineal (DUD)	3	0,7
<b>Pearl-Reed</b>	Mínimos cuadrados	13	2,86
<b>S<sub>B</sub> Johnson</b>	Ajuste no lineal (DUD)	24	5,28
<b>Gamma*</b>	Ajuste no lineal (DUD)	70	15,41
<b>Gamma**</b>	Ajuste no lineal (DUD)	25	9,32

\* Referda a las 454 distribuciones diamétricas.

\*\* Referida únicamente a las 268 distribuciones con asimetría positiva.

La función "A" de Charlier presenta, en general, los mejores resultados con más de un 98 p. 100 de ajustes aceptados sea cual sea la metodología seguida, aunque existen diferencias entre el empleo de los coeficientes de Charlier (98,23 p. 100) y el ajuste por mínimos cuadrados (99,78 p. 100). Sin embargo, el hecho de que los coeficientes de Charlier sean muy sencillos de calcular unido a los buenos resultados obtenidos al caracterizar las distribuciones diamétricas aconsejan su empleo frente a los métodos de ajuste por mínimos cuadrados.

El ajuste de la función de distribución de Weibull muestra diferencias muy notables según la metodología seguida, en el caso del procedimiento de máxima verosimilitud los resultados son muy negativos con un 55,28 p. 100 de ajustes rechazados; este porcentaje se reduce a tan solo el 0,7 p. 100 cuando se realiza un ajuste no lineal empleando como valores de partida del procedimiento iterativo los estimadores de máxima verosimilitud.

La ecuación de crecimiento de Pearl-Reed y la función de densidad  $S_B$  de Johnson presentan unos resultados muy buenos (2,86 y 5,28 p. 100 de ajustes rechazados, respectivamente), aunque por debajo de los valores de las funciones "A" de Charlier y Weibull.

Los peores resultados corresponden a la función de densidad Gamma con un 15,41 p. 100 de ajustes rechazados; sin embargo, este porcentaje se reduce hasta un 9,32 p. 100 cuando se consideran únicamente las distribuciones con asimetría positiva.

## Modelización de las funciones de densidad

El segundo objetivo es obtener ecuaciones que relacionen los parámetros de las funciones con las variables más frecuentes de masa de manera que se puedan estimar dichos parámetros y, de este modo, representar la distribución diamétrica a cualquier edad de un rodal, siempre que los valores de las variables de masa a esa edad sean conocidos.

Estas relaciones se van a ajustar únicamente a las funciones de densidad "A" de Charlier, Weibull y Gamma. Las dos primeras por ser las que mejores resultados presentan en la caracterización de las distribuciones diamétricas y la tercera por presentar dos grandes ventajas frente a la función  $S_B$  de Johnson y a la ecuación de crecimiento de Pearl-Reed:

- Depende únicamente de dos parámetros, lo que reduce los errores en la estimación de la distribución diamétrica. La función  $S_B$  de Johnson depende de tres parámetros (" $a_1$ ", " $a_2$ " y el recorrido de la distribución) y la ecuación de crecimiento de Pearl-Reed de cuatro.
- Se pueden obtener relaciones lineales sencillas entre sus parámetros y las principales variables de masa, en particular el diámetro medio cuadrático (Alvarez González, 1997).

### Modelización de la función de densidad "A" de Charlier

El hecho de que los parámetros de esta función de densidad (" $\beta_3$ " y " $\beta_4$ ") sean coeficientes de asimetría y kurtosis permite suponer que existan relaciones lineales entre ellos y las medidas de tendencia central de las distribuciones, similares a las descritas por Moors (Jobson, 1991). La matriz de correlaciones no mostró valores significativos, por lo que se procedió a realizar un ajuste lineal por regresión "stepwise" incluyendo como variables independientes todas las medidas de tendencia central calculadas (los diámetros máximo y mínimo, los cuartiles y los percentiles correspondientes al 99, 95, 90, 10, 5 y 1 p. 100). Los resultados de los ajustes son:

$$\beta_3 = -0,165414 + 0,086253d_g - 0,006365Q_1 - 0,036421Q_3 - 0,048599Q_2 + 0,004397D_{\text{máximo}} \quad R^2 = 0,7478 \quad [6]$$

$$\beta_4 = -0,309404 + 0,029478Q_1 - 0,039466Q_3 + 0,013946D_{\text{máximo}} \quad R^2 = 0,4343 \quad [7]$$

Los coeficientes de determinación (“R<sup>2</sup>”) obtenidos sugieren que las relaciones ajustadas no son muy representativas de la tendencia real de ambos parámetros, sobre todo en el caso del coeficiente de kurtosis (“β<sub>4</sub>”). El hecho de que los valores de centro de clase diamétrica que se emplean en el ajuste de la función de densidad “A” de Charlier deban estar normalizados, llevó a repetir el ajuste anterior utilizando en este caso, como variables independientes, los valores normalizados de las medidas de tendencia central. Las ecuaciones así obtenidas son las siguientes:

$$\beta_3 = -0,782935 + 1,510676d_{g \text{ norm.}} - 1,135987Q_{1 \text{ norm.}} - 1,030388Q_{3 \text{ norm.}} - 1,916002Q_{2 \text{ norm.}} + 0,223545D_{\text{máximo norm.}} \quad R^2 = 0,8573 \quad [8]$$

$$\beta_4 = 2,085055 - 2,335841d_{g \text{ norm.}} + 2,254984Q_{1 \text{ norm.}} - 2,228907Q_{3 \text{ norm.}} + 0,446107D_{\text{máximo norm.}} \quad R^2 = 0,5344 \quad [9]$$

El ajuste mejora en ambos casos, sin embargo, el segundo modelo continua presentando un error excesivamente elevado. Las Tablas 3 y 4 muestran los resultados de los análisis de regresión para las variables dependientes “β<sub>3</sub>” y “β<sub>4</sub>”, respectivamente.

**TABLA 3**  
**RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA ECUACION [8]**  
*Results of the regression analysis for equation [8]*

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor de F	Prob > F
<b>Modelo</b>	5	44,25693	8,85139	538,596	0,0001
<b>Error</b>	448	7,36252	0,01643		
<b>Total</b>	453	51,61945			

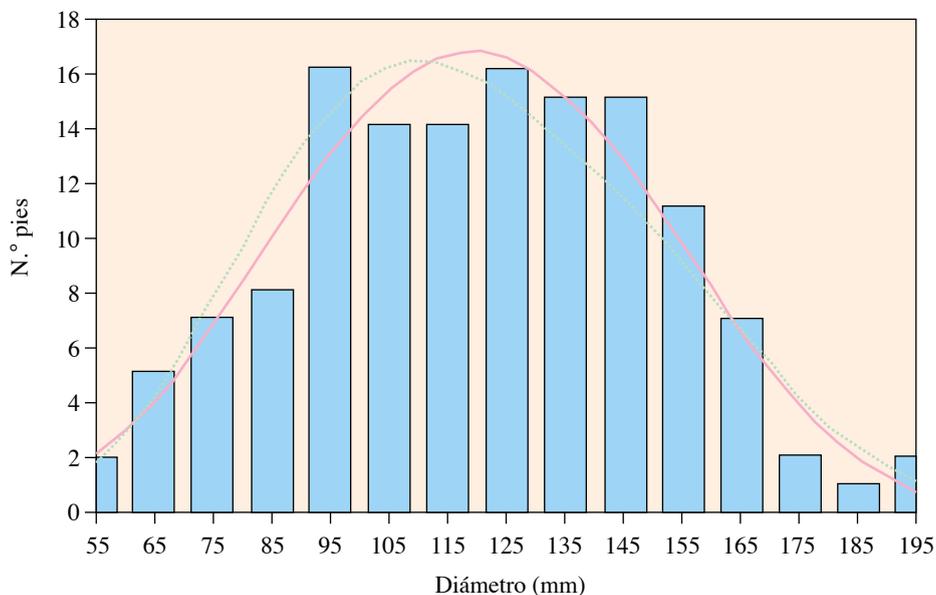
Variable	Grados de libertad	Valor estimado	Error standard	Valor de T	Prob > T
<b>T. independiente</b>	1	-0,782935	0,08375871	-9,348	0,0001
<b>Variable 1</b>	1	1,510676	0,28053190	5,385	0,0001
<b>Variable 2</b>	1	-1,135987	0,07934948	-14,316	0,0001
<b>Variable 3</b>	1	-1,030388	0,08260153	-12,474	0,0001
<b>Variable 4</b>	1	-1,916002	0,07180240	-26,684	0,0001
<b>Variable 5</b>	1	0,223545	0,01480707	15,097	0,0001

**TABLA 4**  
**RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA ECUACION [9]**  
*Results of the regression analysis for equation [9]*

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor de F	Prob > F
Modelo	4	59,67482	14,91870	128,824	0,0001
Error	449	51,99733	0,11581		
Total	453	111,67215			

Variable	Grados de libertad	Valor estimado	Error standard	Valor de T	Prob >  T
T. independiente	1	2,085055	0,21457572	9,717	0,0001
Variable 1	1	-2,335841	0,74456235	-3,137	0,0018
Variable 2	1	2,254984	0,20763590	10,859	0,0001
Variable 3	1	-2,228907	0,21915867	-10,170	0,0001
Variable 4	1	0,446107	0,03649891	12,222	0,0001



Distribución real
  "A" Charlier ajustada
  "A" Charlier estimada

**Fig. 1.—Distribución real de una masa y dos distribuciones teóricas: la distribución "A" de Charlier ajustada y la distribución "A" de Charlier estimada a partir de las ecuaciones [8] y [9]**  
*Empirical distribution of a sample stand and two theoretical distributions: the fitted "A" of Charlier and the "A" of Charlier estimated on the basis of equations [8] and [9]*

La Figura 1 permite comparar, para una de las parcelas empleadas en este trabajo, la distribución "A" de Charlier ajustada a los datos reales y la misma distribución estimada mediante las ecuaciones [8] y [9].

En términos generales, la modelización de la función de densidad "A" de Charlier resulta bastante compleja, puesto que sus parámetros presentan una baja correlación con las variables de masa y las ecuaciones obtenidas incluyen variables como los cuartiles, cuyo valor futuro es difícil de estimar y, por tanto, incrementa el sesgo del modelo.

#### Modelización de la función de distribución de Weibull

El parámetro de escala "a<sub>1</sub>" está generalmente muy correlacionado con el diámetro medio y con el diámetro medio cuadrático (Rennolls *et al.*, 1985; Gadow, 1987; Ortega, 1989; Erviti, 1991; Maltamo *et al.*, 1995; Alvarez González, 1997). La siguiente relación fue ajustada para estimar dicho parámetro en función del diámetro medio cuadrático y la Tabla 5 muestra los resultados del análisis de regresión.

$$a_1 = -4,78160 + 1,058024d_g \text{ (mm)} \quad R^2 = 0,9993 \quad [10]$$

**TABLA 5**  
**RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA ECUACION [10]**  
*Results of the regression analysis for equation [10]*

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor de F	Prob > F
<b>Modelo</b>	1	1.575.275,3532	1.575.275,3532	694.493,173	0,0001
<b>Error</b>	452	1.025,24328	2,26824		
<b>Total</b>	453	1.576.300,5965			
Variable	Grados de libertad	Valor estimado	Error standard	Valor de T	Prob >  T
<b>T. independiente</b>	1	-4,780160	0,21644999	-22,084	0,0001
<b>Variable</b>	1	1,058024	0,00126958	833,363	0,0001

El parámetro de forma "a<sub>2</sub>" se puede estimar en función del diámetro medio cuadrático y algún percentil de la distribución de diámetros, puesto que si en la ecuación de la función de distribución se emplea como centro de clase diamétrica un percentil "P<sub>z</sub>", la densidad obtenida será el porcentaje correspondiente al percentil sobre la densidad total, más un error de estimación.

$$N \frac{z}{100} + \varepsilon_z = N \left( 1 - e^{-(P_z/a_1)^{a_2}} \right) \quad [11]$$

Por tanto, el valor de “ $a_2$ ” se puede despejar en la ecuación [11] en función del valor del percentil y del parámetro de escala:

$$a_2 = \frac{k}{\ln\left(\frac{P_z}{a_1}\right)} \quad [12]$$

Como “ $a_1$ ” está fuertemente correlacionado con el diámetro medio cuadrático puede sustituirse su valor en la ecuación [12]. Por último, es necesario determinar el percentil más adecuado para modelizar el parámetro de forma, para ello se analizó el comportamiento de nueve percentiles ( $P_1, P_5, P_{10}, P_{25}, P_{50}, P_{75}, P_{90}, P_{95}$  y  $P_{99}$ ) y del diámetro medio, siendo este último el que minimizó el error de estimación. La Tabla 6 muestra los resultados del análisis de regresión y la relación obtenida finalmente es la siguiente:

$$a_2 = 2,203289 - \frac{0,062781}{\ln\left(\frac{\bar{d}}{d_g}\right)} \quad R^2 = 0,9214 \quad [13]$$

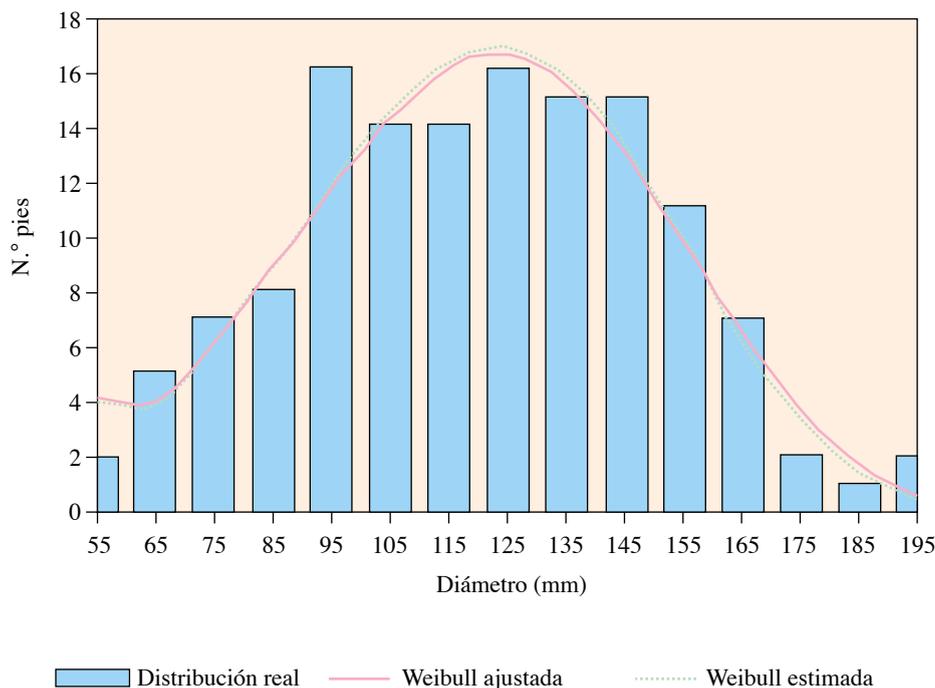
**TABLA 6**  
**RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA ECUACION [13]**  
*Results of the regression analysis for equation [13]*

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor de F	Prob > F
Modelo	1	510,95521	510,95521	5.302,727	0,0001
Error	452	43,55339	0,09636		
Total	453	554,50861			
Variable	Grados de libertad	Valor estimado	Error standard	Valor de T	Prob > T
T. independiente	1	2,203289	0,03664189	60,130	0,0001
Variable	1	-0,062781	0,00086214	-72,820	0,0001

En esta relación interviene el diámetro medio que es una variable de masa cuyo valor no aparece reflejado en el modelo de crecimiento PINASTER (Rodríguez Soalleiro *et al.*, 1994) que va a servir de base para la aplicación de los resultados de este trabajo, por lo que es necesario establecer una tercera relación que permita estimar el valor futuro de este diámetro en función de alguna de las variables que sí forman parte de las predicciones de este modelo. El mejor ajuste se ha obtenido empleando como variable independiente el diámetro medio cuadrático:

$$\bar{d} \text{ (mm)} = - 1,828605 + 0,983371d_g \text{ (mm)} \quad R^2 = 0,9991 \quad [14]$$

La Figura 2 muestra un ejemplo de distribución ajustada y de distribución estimada mediante las ecuaciones [10] y [13] con el diámetro medio calculado a partir de la relación anterior.



**Fig. 2.—Distribución real de una masa y dos distribuciones teóricas: la distribución Weibull de dos parámetros ajustada y la distribución Weibull estimada a partir de las ecuaciones [10] y [13]. El diámetro medio se ha obtenido a partir de la relación [14]**

*Empirical distribution of a sample stand and two theoretical distributions; the fitted two parameters form of the weibull function and the two parameter Weibull estimated on the basis of equations [10] and [13]. The mean diameter was obtained from the relation [14]*

## Modelización de la función de densidad Gamma

El parámetro de forma “ $a_1$ ” se puede relacionar con los diámetros de masa empleando la aproximación de Greenwood, Durand (1961) en función de la inversa del logaritmo de una ratio “R” que es el cociente entre el diámetro medio geométrico y el diámetro medio aritmético.

El diámetro medio geométrico ha sido reemplazado por el diámetro medio cuadrático y debido a las especiales características de esta función, se ha realizado el ajuste empleando únicamente las 268 distribuciones con asimetría positiva. La Tabla 7 muestra los resultados de dicho ajuste y la ecuación finalmente obtenida es la siguiente:

$$a_2 = -1,822509 - \frac{0,502836}{\text{Ln} \frac{d_g}{d}} \quad R^2 = 0,8967 \quad [15]$$

**TABLA 7**  
**RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA ECUACION [15]**  
*Results of the regression analysis for equation [15]*

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor de F	Prob > F
<b>Modelo</b>	1	18.796,14033	18.796,14033	2.309,206	0,0001
<b>Error</b>	266	2.165,14819	8,13965		
<b>Total</b>	267	20.961,28852			

Variable	Grados de libertad	Valor estimado	Error standard	Valor de T	Prob > T
<b>T. independiente</b>	1	-1,822509	0,43016278	-4,237	0,0001
<b>Variable</b>	1	0,502836	0,01046394	48,054	0,0001

Seguindo la misma metodología (Greenwood, Durand, 1961) el parámetro de escala “a<sub>2</sub>” está relacionado con el cociente entre el parámetro de forma y el diámetro medio, obteniendo en el ajuste la ecuación:

$$a_2 = 0,981814 \frac{a_1}{d} \quad R^2 = 0,9751 \quad [16]$$

Se ha prescindido del término independiente al no ser significativamente diferente de cero en el modelo completo. La Tabla 8 muestra los resultados del ajuste.

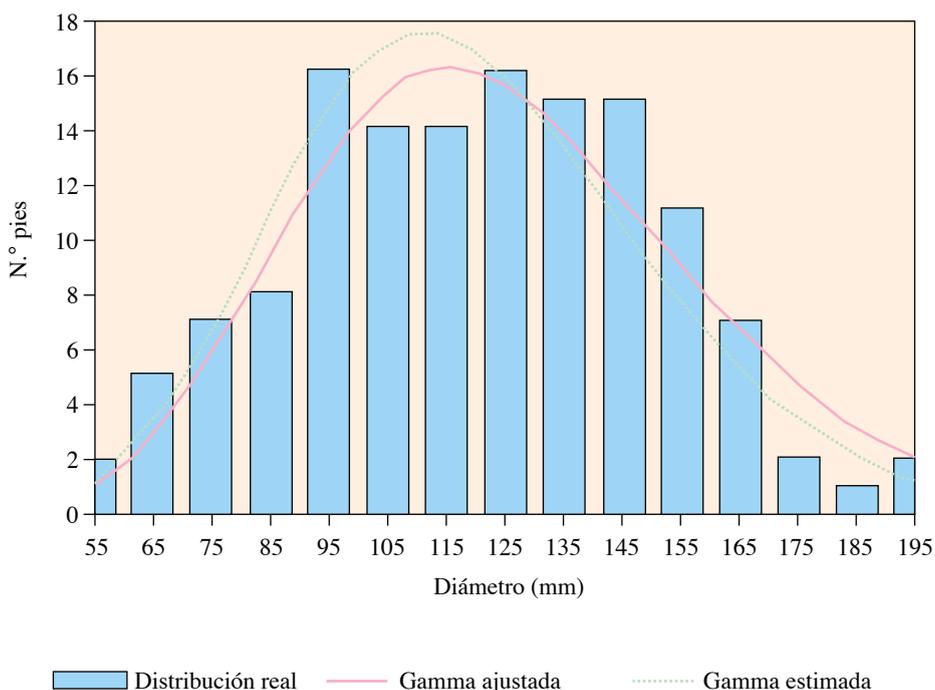
**TABLA 8**  
**RESULTADOS DEL AJUSTE DE LA ECUACION [16]**  
*Results of the regression analysis for equation [16]*

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	Valor de F	Prob > F
<b>Modelo</b>	1	4,79377	4,79377	10.437,395	0,0001
<b>Error</b>	267	0,12263	0,00046		
<b>Total</b>	268	4,91640			

Variable	Grados de libertad	Valor estimado	Error standard	Valor de T	Prob > T
<b>Variable</b>	1	0,981814	0,00961022	102,164	0,0001

La Figura 3 representa, para la misma parcela empleada con las dos distribuciones anteriormente analizadas, la curva de la distribución Gamma ajustada a los datos reales y la curva estimada mediante las ecuaciones [15] y [16], el diámetro medio se ha obtenido a partir de la relación entre éste y el diámetro medio cuadrático.



**Fig. 3.—Distribución real de una masa y dos distribuciones teóricas: la distribución Gamma ajustada y la distribución Gamma estimada a partir de las ecuaciones [15] y [16]. El diámetro medio se ha obtenido a partir de la relación [14]**

*Empirical distribution of a sample stand and two theoretical distributions: the fitted Gamma function and the Gamma estimated on the basis of equations [15] and [16]. The mean diameter was obtained from the relation [14]*

## CONCLUSIONES

La función de densidad “A” de Charlier es la más adecuada para la caracterización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* en Galicia, puesto que sólo depende de dos parámetros cuyo valor se puede calcular de forma sencilla y muy precisa a partir de una muestra representativa de los diámetros de la masa. La función de densidad de Weibull de dos parámetros y la ecuación de crecimiento de Pearl-Reed muestran también un excelente comportamiento.

Sin embargo, la modelización de las distribuciones diamétricas mediante la estimación de los parámetros impone una serie de restricciones que desaconsejan el empleo de la función de densidad “A” de Charlier: por una parte los valores estimados mediante las rela-

ciones ajustadas difieren en exceso de los valores reales y, además, las variables de masa que intervienen (cuartiles, diámetro máximo y desviación típica de los diámetros) no suelen incluirse en las tablas de producción, con lo que su valor futuro debe ser también estimado, incrementándose los errores.

Las funciones más sencillas de modelizar son Weibull y Gamma al depender únicamente de dos parámetros que, además, están correlacionados con variables que, o bien aparecen reflejadas en las tablas de producción como el diámetro medio cuadrático o bien se pueden estimar con bastante precisión a partir de ellas como el diámetro medio.

Los mejores resultados se han obtenido con la función de Weibull debido en gran parte a que los parámetros de esta función se estiman de forma independiente mientras que el parámetro de escala de la función Gamma depende de la estimación del parámetro de forma, aumentando, por tanto, el error. Por otro lado, la función de Weibull presenta una ventaja adicional al poder emplearse para modelizar distribuciones con asimetría negativa.

## SUMMARY

### Analysis and modeling of diameter distributions of *Pinus pinaster* Ait. in Galicia

The purpose of this study is to compare five density functions ("A" of Charlier, Weibull, Pearl-Reed, Johnson  $S_B$  and Gamma) in describing diameter distributions in stands of *Pinus pinaster* in Galicia. The material of the study consists of 454 diameter distributions obtained from 112 sample plots. The behaviour of each one of the five functions was compared using the Kolmogorov-Smirnov goodness fit test. Finally, prediction equations were developed for the "A" of Charlier, Weibull and Gamma functions relating the parameters with the stand variables to construct stand tables.

**KEY WORDS:** Diameter distributions  
*Pinus pinaster*  
"A" of Charlier  
Weibull  
Gamma

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ALDER D., 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento. Estudios FAO. Montes 22/2. Roma. 198 pp.
- ALVAREZ GONZALEZ J.G., 1997. Análisis y caracterización de las distribuciones diamétricas de *Pinus pinaster* Ait. en Galicia. Tesis doctoral. ETSI. Montes. U.P.M. Inédito. 270 pp.
- ALVAREZ GONZALEZ J.G., GADOW K.V., 1998. Characterizing Height Distributions of *Pinus pinaster* in Galicia (Spain). Scandinavian Journal of Forest Research. (En prensa).
- BAILEY R.L., DELL T.R., 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. Forest Science, 19 (2), 97-104.
- COHEN A.C., 1965. Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. Technometrics, 7 (4), 579-588.
- ERVITI J.J., 1991. Desarrollo de modelos de crecimiento y producción de las masas forestales de *Pinus halepensis* Mill en España. Tesis doctoral. ETSI. Montes. U.P.M. Inédito. 319 pp.
- GADOW K.V., 1987. Untersuchungen zur Konstruktion von Wuchsmodellen für schnellwüchsige Plantagenbaumarten. Schriftenreihe d. Forstw. Fak. Univ. München, N° 77, 147 pp.
- GREENWOOD J., DURAND D., 1960. Aids for fitting the gamma distribution by maximum likelihood. Technometrics 2, 55-65.
- HAFLEY W.L., SCHREUDER H.T., 1977. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. Canadian Journal of Forest Research, 7 (3), 481-487.

- JOBSON J.D., 1991. Applied multivariate data analysis. Vol. I: Regression and experimental design. Springer-Verlag. New York.
- KNOEBEL B.R., BURKHART H.E., 1991. A bivariate distribution approach to modelling forest diameter distributions at two points in time. *Biometrics*, 47, 241-253.
- LITTLE S.N., 1983. Weibull diameter distributions for mixed stands of western conifers. *Canadian Journal of Forest Research*, 13, 85-88.
- MALTAMO M., PUUMALAINEN J., PÄIVINEN R., 1995. Comparison of beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 10, 284-295.
- ORTEGA A., 1989. Modelos de evolución de masas de *Pinus sylvestris* L. Tesis doctoral. ETSI. Montes. UPM. Inédito. 294 pp.
- OSBORNE J.G., SCHUMACHER F.X., 1935. The construction of NORMAL-Yield and Stand Tables for Even-aged timber stands. *Journal of Agricultural Research*, 51 (6), 547-564.
- RALSTON M.L., JENRICH R.I., 1978. DUD, a derivate-free algorithm for nonlinear least squares. *Technometrics*, 20, 7-14.
- RENNOLLS K., GEARY D.N., ROLLINSON T.J.D., 1985. Characterizing diameter distributions by the use of the Weibull distribution. *Forestry*, 58 (1), 57-66.
- RODRIGUEZ SOALLEIRO R., ALVAREZ GONZALEZ. J.G., VEGA G., 1994. Piñeiro do país. Modelo dinámico de crecemento de masas regulares de *Pinus pinaster* Aiton en Galicia. Capacitación e extensión. Manuais técnicos 8. Xunta de Galicia. 40 pp.
- SAS Institute. Inc., 1989. SAS/STAT User's guide, Versión 6, Fourth Edition. Volume 2. Cary. USA. 846 pp.
- SCHNUR G.L., 1934. Diameter distributions for Old-Field Loblolly Pine Stands in Maryland. *Journal of Agricultural Research*, 49 (8), 731-743.
- WILK M.B., GNANADESIKAN R., HUYETT M.J., 1962. Estimation of parameters of the gamma distribution using order statistic. *Biometrika*, 49 (3-4), 525-545.