

ECUACIONES ALOMETRICAS DE TRES VARIABLES: ESTIMACION DEL VOLUMEN, CRECIMIENTO Y PORCENTAJE DE CORTEZA DE LAS PRINCIPALES ESPECIES MADERABLES ESPAÑOLAS

**J. MARTINEZ MILLAN
P. ARA LAZARO
I. GONZALEZ DONCEL**

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Univ. Politécnica
Ciudad Universitaria. 28040 Madrid (España)

RESUMEN

Se presentan unas ecuaciones alométricas de tres entradas que proporcionan, para las especies maderables españolas más abundantes en los montes ordenados, las siguientes variables:

- Volumen maderable del fuste con corteza.
- Crecimiento corriente anual del volumen sin corteza.
- Porcentaje de corteza.

El uso de estas ecuaciones, de ámbito general, permite sustituir el apeo y medición de árboles por la medición sobre una muestra de árboles en pie de los siguientes parámetros:

- Diámetro normal.
- Altura total.
- Diámetro a 4 m de altura sobre el tocón.
- Espesor diametral de corteza.
- Incremento diametral de los 5 ó 10 últimos años.

A partir de la muestra de árboles en pie se pueden calcular analíticamente las tarifas de ordenación de volumen, crecimiento y porcentaje de corteza.

PALABRAS CLAVE: Ordenación de montes
Ecuaciones de tres entradas
Tarifas de ordenación
Cubicación
Porcentaje de corteza
Crecimiento corriente del volumen

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En la actualidad, y sin considerar las Ordenaciones que serían necesarias en muchos de nuestros montes, la actualización de los inventarios como consecuencia de la formulación de los Planes Especiales de revisiones de Proyectos de Ordenación afectan a más de 100.000 ha anuales, lo que obligaría al apeo de una muestra

Recibido: 8-6-93

Aceptado para su publicación: 10-9-93

de árboles, para construir nuevas ecuaciones, en todos aquellos casos en los que no se dispusiera de datos fiables.

Las Instrucciones de Ordenación de Montes Arbolados de 1970 proponen calcular las existencias y crecimiento de las masas para cada especie como el producto del número de pies de cada clase diamétrica por los valores unitarios correspondientes.

Independientemente del método de inventario utilizado para la toma de datos en el campo (conteo pie a pie o muestreo estadístico), los datos mínimos por clases diamétricas que suelen manejarse para el cálculo de las existencias de los montes de producción maderable son los siguientes:

Número de pies por clases diamétricas	N
Area basimétrica	G
Volumen maderable con corteza	V
Volumen maderable sin corteza	Vs
Crecimiento corriente anual de Vs	IV

El volumen se refiere generalmente al volumen del fuste maderable, con y sin corteza, hasta un diámetro en punta delgada determinado (7,5; 10 ó 20 cm con corteza habitualmente), dependiendo del destino de la madera.

El crecimiento se refiere al crecimiento corriente anual del volumen de fuste, que puede ser con o sin corteza.

Conocida la distribución diamétrica por especies, para llevar a cabo el cálculo de existencias y crecimientos, será necesario determinar los valores unitarios por clases diamétricas (valores modulares) (Mackay, 1949) o las tarifas de ordenación.

La obtención de estos valores unitarios se puede hacer principalmente siguiendo dos alternativas, que se seleccionan según se disponga o no de ecuaciones previamente investigadas.

La primera de ellas se refiere al caso de no poseer datos de valores unitarios o ecuaciones, por lo que se debería apear una muestra de árboles que, una vez medidos cuidadosamente, servirán para el cálculo de ecuaciones de existencias y crecimientos (Chevrou, 1986). Esta metodología, que implica el apeo y cuidadosa medición de árboles por trozas, es cara y laboriosa.

En el caso de disponer de ecuaciones de dos entradas $y = F(d, x)$, se sustituye la medición de los árboles apeados por la medición en pie de las variables (d, x) que figuran independientes en dichas ecuaciones.

En el caso de ecuaciones de volumen x es la altura total, en el caso de ecuaciones de crecimiento el incremento diametral, y en el caso del porcentaje de corteza, el espesor diametral de la corteza.

La mayoría de las ecuaciones de cubicación de doble entrada obtenidas de árboles medidos por trozas y publicadas están recopiladas en la publicación «Tablas de cubicación por diámetros normales y alturas totales» (Pita, 1967).

También, a este respecto, conviene señalar que existen publicadas (IFN, 1979), para las especies forestales más representativas, tablas de dos entradas que proporcionan el volumen del fuste con corteza desde el suelo hasta un diámetro en punta de 7,5 cm. Estas tablas, de aplicación provincial, regional y nacional, procedentes del I Inventario Forestal Nacional, fueron construidas con gran número de árboles, pero cubricados en pie con relascopio y medidos con poca precisión en los diámetros superiores al normal. Las ecuaciones son del tipo:

$$v = a + bd^2 h$$

y

$$v = (a + bd^2) h$$

En otros casos se han construido específicamente tablas zonales de cubicación utilizando para ello muchas veces datos de árboles procedentes de aprovechamientos o árboles apeados para ello. Los modelos matemáticos ajustados han sido generalmente del mismo tipo que los antes citados, utilizándose también los siguientes:

$$\begin{aligned} v &= a + b*d^2 + c*(d^2h) \\ v &= a + b*h + c*d^2 + c*d^2h \quad (\text{F. Australiana}) \\ v &= a + b*(d^2h) + c*(d^2h)^2 \\ v &= a_0 d^{a1} h^{a2} \end{aligned}$$

y otros que resultan de dividir las variables por el factor de ponderación d^2h (McClure *et al.*, 1983).

Las ecuaciones para la estimación del crecimiento suelen ser de uso zonal y la mayoría no están publicadas. Se puede recurrir a las ecuaciones de crecimiento que se presentan en los 50 cuadernos provinciales del I Inventario Forestal Nacional que proporcionan, para las principales especies, el crecimiento anual unitario (iv) en función del volumen maderable del fuste (v), y son del tipo:

$$iv = a_0 + a_1v + a_2v^2$$

La imprecisión de las tablas de cubicación es trasladable a estas ecuaciones, por lo que su utilidad puede ser cuestionable.

Spurr (1952) mantiene que «la localización, tipo de crecimiento y sitio donde vegeta un árbol aparentemente no afecta al volumen total del mismo lo suficiente como para justificar el desarrollo de más de una tabla volumétrica para una determinada especie».

Aunque tal afirmación no se puede generalizar alegremente al caso de la corteza y el crecimiento, sí se puede asegurar que una ecuación con tres variables independientes se puede utilizar con carácter general (siempre y cuando la tercera variable contribuya significativamente, en presencia de otras dos, a una estimación de la variable dependiente y si además la muestra utilizada para construirla está extendida en el ámbito de presencia de la especie).

Por otro lado, aunque ya se ha indicado que existen ecuaciones de cubicación para nuestras principales especies forestales, a menudo no están disponibles o se desconoce la fiabilidad de las mismas y su posible aplicación a masas de una determinada especie y localidad. Tales afirmaciones responden al hecho habitual de desconocerse el tamaño de la muestra con que fueron elaboradas, la precisión en las mediciones, el volumen de fuste al que se refieren, los métodos utilizados para su elaboración, calidad del ajuste, ... (Avery, 1983).

Estos argumentos justifican el objetivo del presente trabajo que no es otro que el de presentar una serie de ecuaciones normalizadas de tres entradas de carácter general que proporcionen, para las especies maderables españolas más abundantes en los montes ordenados, las variables que habitualmente son necesarias en la gestión forestal con vistas a conocer su evolución y determinar su posibilidad:

- Volumen maderable del fuste con corteza (v).
- Crecimiento corriente anual del volumen sin corteza (iv).
- Porcentaje de corteza (pc).

Se ha preferido calcular ecuaciones de porcentaje de corteza en vez del volumen sin corteza para evitar que las funciones ajustadas por mínimos cuadrados

para los volúmenes con y sin corteza presenten anomalías al utilizarse para los valores extremos de las variables dependientes.

Las ecuaciones que se proponen son del tipo general $y = f(d, h, x)$:

$$\begin{aligned}v(\text{c.c.}) &= f(d, h, d_4) \\iv &= g(d, h, id) \\pc &= h(d, h, ec)\end{aligned}$$

El uso de estas ecuaciones, de ámbito general, permite sustituir el apeo y cubicación precisa de árboles por la medición de los siguientes parámetros sobre una muestra de árboles en pie:

- Diámetro normal (d).
- Altura total (h).
- Diámetro a 4 m de altura sobre el tocón (d_4).
- Espesor diametral de corteza (ec).
- Incremento diametral anual (id).

A partir de los datos medidos en la muestra de árboles en pie y de las ecuaciones que se presentan en este trabajo, se pueden obtener ecuaciones zonales de doble entrada o directamente, mediante submuestras, las tarifas de ordenación.

Para construir directamente las tarifas de ordenación $y = f(d)$, a partir de las ecuaciones de tres entradas $y = F(d, h, x)$ y de la muestra de árboles en pie, se suele proceder como sigue:

La muestra se descompone en submuestras que se asignan a estratos homogéneos o a unidades dasocráticas. Con las ternas de valores (d_j, h_j, x_j) de la submuestra se trata en la ecuación correspondiente y se calcula para cada árbol j el valor y_j . Con los pares de valores (d_j, y_j) se puede ajustar por mínimos cuadrados una tarifa de ordenación $y = f(d)$ de aplicación local.

Los modelos matemáticos más utilizados son los siguientes:

$$\begin{aligned}y &= a_0 + a_1 d^2 & y &= a_0 + a_1 d + a_2 d^2 \\y &= a_0 d^{a1} & y &= a_0 + e^{a1/d}\end{aligned}$$

También se puede pasar a las tarifas de ordenación mediante la determinación, con los valores (d_j, h_j, x_j), de las relaciones $h = h(d)$ y $x = x(d)$. Estas funciones sustituidas en la ecuación de tres entradas proporcionan la ecuación de la tarifa de ordenación $y = f(d)$.

MATERIAL Y METODOS

Para la elaboración de las ecuaciones se ha utilizado la información disponible de árboles tipo apeados y medidos en proyectos de ordenación que se han realizado hasta la fecha siguiendo el proceso automático normalizado de los inventarios para la ordenación de montes (Moro, 1969).

Esta información está constituida por unos 25.000 árboles de los Servicios Forestales provinciales que se recopilaron en el IFIE y posteriormente en el ICONA.

Los datos se refieren a las especies que se citan a continuación, junto a las que figuran el número de árboles utilizado para la elaboración de las tablas, así como las provincias con representación de árboles en la muestra (en abreviatura).

Especie	N.º árboles ¹	Provincias más representadas
<i>P. sylvestris</i>	9.108	Av, Bu, Cu, Hu, L, Le, M, Sg, So, Te, Z
<i>P. uncinata</i>	1.038	Hu, L, Te
<i>P. pinea</i>	1.844	Ab, Av, Cu, H, J, M, Sg, Va
<i>P. halepensis</i>	1.629	Ab, Al, Pm, J, Le, Ta, V
<i>P. laricio</i>	2.621	Ab, Cu, J, Le, M, Na, So, Te
<i>P. pinaster</i>	5.422	Ab, Av, Bu, Ca, Cu, Gu, L, M, Sg, So, Te, Va, Z
<i>P. pinaster</i> (resin.)	1.871	Ab, Av, Gu, M, Sg, So, Va
<i>Abies alba</i>	1.834	Hu, Le, Na
<i>Q. robur/Q. petraea</i>	347	Le, Na, S
<i>Fagus sylvatica</i>	5.241	B, Bu, Ge, Hu, Le, Na, O, S, So, Z

¹ Tamaño de la muestra en el ajuste de las tablas de cubicación. Estas cifras pueden no coincidir con los árboles utilizados en las ecuaciones de crecimiento y porcentaje de corteza al haberse eliminado en cada ocasión, con distintos criterios, árboles carentes de los datos adecuados.

Dado que la muestra se distribuye por las áreas más representativas de las distintas especies y que, para cada una de ellas, el rango de variación de las variables independientes es suficientemente extenso, se atribuye, a las ecuaciones resultantes un ámbito de utilización general. En la Tabla 1 se presentan, para cada una de las especies investigadas, el tamaño de la muestra y de los valores medio, mínimo y máximo de las variables independientes.

En lo que respecta al número de variables a incluir en los modelos, otros trabajos (Schmid-Haas *et al.*, 1981; Martínez Millán *et al.*, 1992) ya han demostrado la utilidad de incluir una tercera variable en las ecuaciones que explique la variabilidad del volumen y crecimiento de árboles con el mismo diámetro y altura.

Una de las características que deben presentar las variables independientes a incluir en los modelos de regresión es su facilidad de medición, pues de este modo se puede reducir sustancialmente el coste de la estimación comparado con otros métodos alternativos.

En todas las ecuaciones que se presentan, se han considerado como variables independientes del diámetro normal *c.c* «d» y la altura total «h».

Con vistas a normalizar y facilitar la medición, se ha propuesto en los modelos de cubicación, *v*, que la tercera variable sea el diámetro del fuste, *d₄*, medido a 4 metros sobre el tocón (Martínez Millán *et al.*, 1992). Aunque es indiscutible la utilidad de incluir esta tercera variable en las ecuaciones de cubicación, también es cierto que esta variable, *d₄*, no siempre es posible de medir en los inventarios y a menudo obliga a una cierta especialización y práctica en su medición. Estas razones apoyaron la decisión de ensayar también ecuaciones de dos entradas (diámetro normal y altura total) para la estimación del volumen del fuste con corteza.

Para el modelo de porcentaje de corteza, *pc*, se propone como tercera variable el espesor diametral de la corteza, *ec*, medido en la sección normal.

Finalmente, para el modelo que proporciona el crecimiento corriente anual del volumen de fuste sin corteza, *iv*, se propone el incremento diametral anual sin corteza, *id*, medido en la sección normal.

El paso siguiente ha sido la búsqueda de expresiones explícitas para las anteriores ecuaciones. Los modelos de regresión más utilizados en el campo de la investigación forestal son fundamentalmente el lineal polinómico y el alométrico, cuyas expresiones generales son respectivamente:

TABLA 1
VALORES MEDIOS, MINIMOS Y MAXIMOS DE LA MUESTRA
Mean, minimum and maximum sample values

Especie	N.º arboles	Diámetro normal (cm)		Altura total (m)		Espesor corteza (cm)		Crecim. diám. (mm/año)	
		\bar{d}	d mín. - d máx.	\bar{h}	h mín. - h máx.	\bar{ec}	ec mín. - ec máx.	\bar{id} ¹	id mín. - id máx.
<i>P. silvestre</i>	9.108	31,83	9,0 - 99,0	14,95	4,5 - 32,0	4,70	0,3 - 9,0	2,22	0,2 - 13,6
<i>P. uncinata</i>	1.038	29,97	9,0 - 57,8	13,88	5,5 - 29,4	2,28	0,3 - 4,0	2,01	0,6 - 8,5
<i>P. piñonero</i>	1.844	33,44	19,0 - 78,0	10,73	3,7 - 22,7	6,64	0,9 - 9,9	2,87	0,6 - 14,7
<i>P. carrasco</i>	1.629	30,23	13,0 - 74,0	10,13	3,2 - 20,3	6,04	0,8 - 7,5	2,49	0,8 - 9,0
<i>P. laricio</i>	2.621	33,91	11,5 - 74,0	15,18	5,5 - 30,4	6,28	0,5 - 9,0	1,84	0,4 - 14,0
<i>P. pinaster</i>	5.422	31,96	10,0 - 86,0	12,89	4,0 - 29,6	7,00	0,5 - 9,9	2,83	0,2 - 15,9
<i>P. pinaster/resin.</i>	1.871	36,58	18,5 - 69,0	13,49	6,0 - 25,0	5,14	0,3 - 9,9	2,86	0,4 - 15,0
Abeto	1.834	35,51	20,0 - 76,0	19,52	8,7 - 39,0	2,46	0,3 - 3,8	2,67	0,2 - 14,0
Roble	347	42,45	21,0 - 99,0	17,19	9,0 - 30,0	3,46	0,5 - 7,0	2,73	0,8 - 12,8
Haya	5.421	34,86	18,0 - 94,0	17,65	7,0 - 33,9	1,12	0,1 - 7,0	3,12	0,4 - 12,0

¹ Los valores medios de las cuatro variables se han obtenido a partir de la media de los logaritmos, por lo que representan la media geométrica en vez de la media aritmética.

$$y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n + e$$

$$y = k X_1^a X_2^b \dots X_n^c + e$$

En donde:

y = variable dependiente (v, c.c, iv ó pc).

$X_1 \dots X_n$ = variables independientes (d, h, d_4 , id y/o ec).

$A_1 \dots A_n, k, a, b \dots c$ = coeficientes de las regresiones.

e = error aleatorio.

El cálculo de los coeficientes, en ambas ecuaciones, se suele llevar a cabo utilizando técnicas de regresión por mínimos cuadrados, para lo cual sería necesario expresar en forma lineal el modelo alométrico mediante transformación logarítmica.

Las ventajas de este último frente al modelo polinómico son varias. El modelo alométrico se puede considerar como una generalización del modelo lineal:

$$y = A_0 + A_1 d^2 h$$

donde no se fijan a priori los valores de los exponentes (como por ejemplo $a = 2$ y $b = 1$), lo que evita ordenadas en el origen negativas, y donde se elimina el término independiente, que en algunos casos es de difícil interpretación biológica.

Además, la transformación logarítmica corrige sustancialmente la heteroscedasticidad (no homogeneidad) de la varianza de la variable dependiente, una de las hipótesis de base que deben cumplir las variables para que las conclusiones obtenidas con las técnicas de regresión sean válidas (Carbonell *et al.*, 1983).

Debe mencionarse, por otra parte, que presentan el inconveniente de dar estimaciones por defecto al deshacer la transformación logarítmica.

No obstante, las ventajas mencionadas llevaron a tomar la decisión de seleccionar el modelo alométrico, que vino apoyada por los altos valores de los coeficientes de determinación obtenidos en los ajustes del modelo.

RESULTADOS

A continuación se presentan, para cada especie, los valores de los coeficientes de regresión de las tres ecuaciones de predicción del volumen, crecimiento corriente y porcentaje de corteza de árboles individuales con sus coeficientes de determinación correspondientes.

Las ecuaciones volumétricas tienen su uso restringido a aquellos árboles con una altura de fuste igual o superior a los 4 m. Debido a que el volumen del fuste de los árboles de las muestras utilizadas no siempre fue el mismo motivado por los diferentes volúmenes aprovechables que se consideran según zonas, especies y destinos de la madera, se presentan los valores medios de los diámetros final de fuste para cada especie.

Dado el tamaño de muestras utilizado, el rango de variabilidad de las variables independientes y la distribución de los árboles muestrales por las provincias más representativas, se puede atribuir a estas ecuaciones un ámbito de utilización general.

Finalmente, y como ya se ha indicado, se presentan también las ecuaciones de dos entradas (d, h) del volumen del fuste con corteza que permitirán estimar esta variable cuando no se haya medido el diámetro del fuste a 4 m de altura sobre tocón.

TABLA 2
VALORES DE LOS COEFICIENTES DE REGRESION
EN LA ESTIMACION DEL VOLUMEN

$$Vc.c. = a \cdot d^b \cdot h^c \cdot d_4^e$$

Regression coefficients for volume estimation

$$Vc.c. = a \cdot d^b \cdot h^c \cdot d_4^e$$

Especie	a	b	c	e	R ²	df. f.	
						Media	D. típica
P silvestre	0,129643	0,63460	0,66054	1,34590	0,9914	9,94	2,35
P. uncinata	0,149958	0,67850	0,61349	1,27585	0,9863	10,61	1,85
P. piñonero	0,118081	1,27712	0,62622	0,71046	0,9758	18,22	7,71
P. carrasco	0,197934	1,17093	0,49827	0,74489	0,9734	10,71	2,71
P. laricio	0,094711	0,82460	0,68843	1,22089	0,9924	10,69	3,09
P. pinaster	0,108568	0,94292	0,58958	1,12996	0,9933	10,49	2,63
P. pinaster/res.	0,118271	0,58894	0,68979	1,40143	0,9846	11,11	4,81
Abeto	0,093663	0,34656	0,78391	1,62995	0,9921	10,92	1,79
Roble	0,089269	0,84198	0,52937	1,30387	0,9788	19,98	4,39
Haya	0,144251	0,56483	0,47303	1,51617	0,9693	15,56	4,38

UNIDADES:

Vc.c. = Volumen unitario del fuste con corteza (dm³).

d = Diámetro normal con corteza (cm).

h₄ = Altura total (m).

d = Diámetro c.c. del fuste a 4 m sobre el tocón (cm).

df.f. = Diámetro final de fuste con corteza (cm).

TABLA 3
VALORES DE LOS COEFICIENTES DE REGRESION
EN LA ESTIMACION DEL CRECIMIENTO EN VOLUMEN

$$Iv = a \cdot d^b \cdot h^c \cdot id^e$$

Regression coefficients for annual volume increment estimation

$$Iv = a \cdot d^b \cdot h^c \cdot id^e$$

Especie	a	b	c	e	R ²
P silvestre	0,007992	1,13132	0,95109	0,72585	0,9089
P. uncinata	0,011025	1,12197	0,81505	0,74335	0,8944
P. piñonero	0,006623	1,18719	0,86325	0,83132	0,8864
P. carrasco	0,003941	1,06907	1,27405	0,71183	0,8644
P. laricio	0,009870	1,17523	0,77427	0,76849	0,6520
P. pinaster	0,004028	1,39954	0,82617	0,75038	0,9326
P. pinaster/resin.	0,012995	1,20649	0,67073	0,68847	0,8239
Abeto	0,008252	0,97643	1,12433	0,73241	0,9435
Roble	0,007065	1,25483	0,67975	0,87240	0,9484
Haya	0,006985	1,24790	0,78333	0,77064	0,8890

UNIDADES:

Iv = Crecimiento anual del volumen del fuste sin corteza (dm³/año).

d = Diámetro normal con corteza (cm).

h = Altura total (m).

id = Crecimiento diametral normal anual (mm/año).

TABLA 4
VALORES DE LOS COEFICIENTES DE REGRESION
EN LA ESTIMACION DEL PORCENTAJE DE CORTEZA

$$P_c = a \cdot d^b \cdot h^c \cdot ec^e$$

Regression coefficients for bark percentage estimation

$$P_c = a \cdot d^b \cdot h^c \cdot ec^e$$

Especie	a	b	c	e	R ²
P silvestre	192,59	-0,6763	-0,4439	0,7095	0,6411
P. uncinata	104,72	-0,8839	0,0082	0,8246	0,8051
P. piñonero	124,19	-0,6392	-0,2379	0,7049	0,6939
P. carrasco	138,02	-0,3695	-0,6888	0,6576	0,6371
P. laricio	96,08	-0,6298	-0,0350	0,5737	0,4492
P. pinaster	130,42	-0,5952	-0,1830	0,5762	0,7857
P. pinaster/resin.	131,30	-0,5579	-0,0636	0,3581	0,5772
Abeto	71,77	-0,5970	-0,0438	0,7060	0,7336
Roble	99,82	-0,6685	-0,0957	0,7909	0,8806
Haya	83,40	-0,6399	-0,1178	0,7292	0,7254

UNIDADES:

- P_c = Porcentaje de corteza del volumen del fuste (%).
- d = Diámetro normal con corteza (cm).
- h = Altura total (m).
- ec = Espesor diametral normal de la corteza (cm).

TABLAS DE CUBICACION DE DOS ENTRADAS
DEL FUSTE MADERABLE

Pino silvestre	V _{c.c} = 0,047144	d ^{1,97643}	h ^{0,93332}	R ² = 0,9752
Pino uncinata	V _{c.c} = 0,095040	d ^{1,65704}	h ^{1,07266}	R ² = 0,9171
Pino piñonero	V _{c.c} = 0,056395	d ^{1,94631}	h ^{0,92797}	R ² = 0,9615
Pino carrasco	V _{c.c} = 0,077186	d ^{1,84818}	h ^{0,88012}	R ² = 0,9507
Pino laricio	V _{c.c} = 0,037939	d ^{2,03310}	h ^{0,96650}	R ² = 0,9827
Pino pinaster	V _{c.c} = 0,036114	d ^{2,12490}	h ^{0,84716}	R ² = 0,9820
Pino pinaster (resinado)	V _{c.c} = 0,097816	d ^{1,85964}	h ^{0,87667}	R ² = 0,9456
Abeto	V _{c.c} = 0,052684	d ^{1,82213}	h ^{1,08606}	R ² = 0,9823
Roble	V _{c.c} = 0,066964	d ^{2,03702}	h ^{0,70403}	R ² = 0,9679
Haya	V _{c.c} = 0,079112	d ^{1,95731}	h ^{0,75504}	R ² = 0,9447

- V_{c.c} = Volumen unitario del fuste con corteza (dm³).
- d = Diámetro normal con corteza (cm).
- h = Altura total (m).

VALIDACION DE LOS MODELOS

En algunas ocasiones se poseen datos de árboles cubicados en el suelo con precisión, pero sin embargo no son suficientes para elaborar una ecuación de predicción de parámetros dendrométricos con una cierta fiabilidad. En estos casos es posible (y recomendable) comprobar la validez de las tablas que aquí se presentan operando de la siguiente forma:

- 1.º Se parte de cualquiera de las ecuaciones que estiman el volumen, el crecimiento y/o el porcentaje de corteza para una especie en concreto, por ejemplo:

$$V_{c.c} = p d^a h^b d_4^c$$

- 2.º Se calcula el volumen (crecimiento o porcentaje de corteza) total del lote de árboles, cubicados en el suelo y correspondientes a la zona para la cual se quiere aplicar las tablas (V_{real}).
 - 3.º Se calcula el volumen (crecimiento o porcentaje de corteza) del mismo lote utilizando las ecuaciones de tres entradas (V_{tabla}), para lo cual será necesario haber medido en los árboles del lote todas las variables independientes que figuran en las ecuaciones (es recomendable que tales variables se midan antes de que los árboles hayan sido apeados).
 - 4.º Se calcula el índice $p' = V_{real} / V_{tabla}$ que corrige el posible sesgo de la tabla.
 - 5.º Se modifica la ecuación, quedando:
- $$V_{c.c} = p' p d^a h^b d_4^c$$
- 6.º Si $(1 - p')$ es, en valor absoluto, inferior a 0,01 no es necesaria la corrección de la tabla.

APLICACION A UN CASO CONCRETO

Dado que se dispone de información precisa de 40 árboles de pino silvestre procedentes de las cortas finales llevadas a cabo en 1992 en el monte Matas, N.º 1 del CUP en Valsáin, provincia de Segovia, se ha decidido utilizarlos para ensayar la validez de las ecuaciones que aquí se presentan (en general se recomienda su aplicación a lotes con un mínimo de 50 árboles para dar ocasión a las oscilaciones aleatorias a compensar distancias) (Parde, 1961).

El proceso operativo fue el siguiente: en cada árbol se midió el diámetro normal y la altura total. Posteriormente fueron apeados y troceados tomándose en cada troza datos sobre los diámetros extremos con y sin corteza, crecimiento diametral de los 10 últimos años y diámetro a cuatro metros sobre la sección de corta. Debido a los distintos destinos de la madera y dependiendo de su calidad, cada árbol fue troceado hasta un diámetro en punta delgada variable. Los datos dendrométricos resultantes de esta muestra de 40 árboles quedan resumidos en la Tabla 5.

Un aspecto importante en la aplicación de tablas y tarifas de ordenación a una muestra en particular es si está dentro del rango de valores para los cuales han sido

elaboradas. Comparando estos datos con los de la Tabla 1, se puede observar que este lote de árboles no sobrepasa en ningún caso las dimensiones de los árboles utilizados en la elaboración de los modelos que aquí se presentan.

Aplicando a continuación las ecuaciones de volumen de fuste, crecimiento y porcentaje de corteza del pino silvestre a estos 40 árboles, se han obtenido los resultados de la Tabla 6.

Una primera aproximación, relativa a las diferencias entre los valores reales obtenidos a partir del apeo y medición de los árboles muestra y los estimados como resultado de la aplicación de las ecuaciones de tres entradas, se puede observar en las Figuras 1, 3 y 5. En estos gráficos se han enfrentado los volúmenes, crecimientos y porcentajes de corteza unitarios reales con los estimados de los 40 árboles muestra. Las peores estimaciones (nube de puntos más alejada de la diagonal del eje de coordenadas) se han obtenido para el porcentaje de corteza, como cabía esperar dadas las peculiaridades de esta variable, que en la casi totalidad de los 40 pies se ve sobrestimado por la ecuación. Este hecho, sin embargo, no debe interpretarse como un comportamiento general de la ecuación.

TABLA 5
DATOS DENDROMETRICOS DE 40 ARBOLES
DE PINO SILVESTRE VALSAIN (SEGOVIA)

Dendrometric data of forty Scots pines

	Media	D. típica	Mínimo	Máximo
d (cm)	39,11	11,15	18,0	60,0
h (m)	18,44	2,71	12,0	22,0
d ₄ (cm)	31,69	9,42	14,7	49,8
ec (cm)	3,93	1,19	1,2	6,9
id (mm/año)	2,72	1,51	0,7	7,4
Vcc (dm ³)	1.133,53	751,04	155,3	2.809,8
Iv (dm ³ /año)	18,56	13,64	4,2	57,46
Pc (%)	10,35	2,45	5,74	15,59
df.f (cm)	10,76	2,31	6,8	16,0
Edad (años)	108,42	23,26	49	150

TABLA 6
VOLUMEN, CRECIMIENTO Y PORCENTAJE DE CORTEZA
DE 40 ARBOLES DE PINO SILVESTRE ESTIMADOS
CON LAS ECUACIONES DE 3 ENTRADAS VALSAIN (SEGOVIA)

Volume annual increment and bark percentage of forty Scots pines estimated using three variables equations

	Media	D. típica	Mínimo	Máximo
Vcc (dm ³)	1.110,03	685,86	164,53	2.583,38
Iv (dm ³ /año)	17,70	12,60	3,38	59,81
Pc (%)	11,78	1,95	8,54	17,84

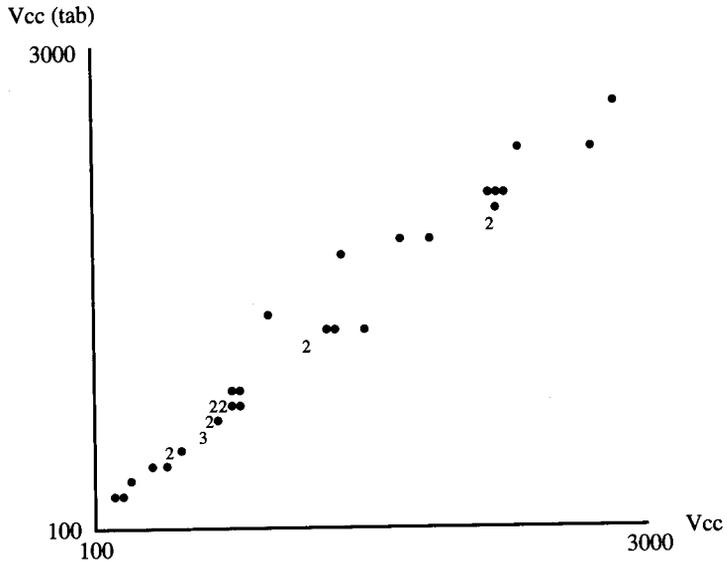


Fig. 1.—Comparación entre el volumen real y el volumen estimado de 40 árboles de pino silvestre
Comparison between real and estimated stem volumes for forty Scots pines

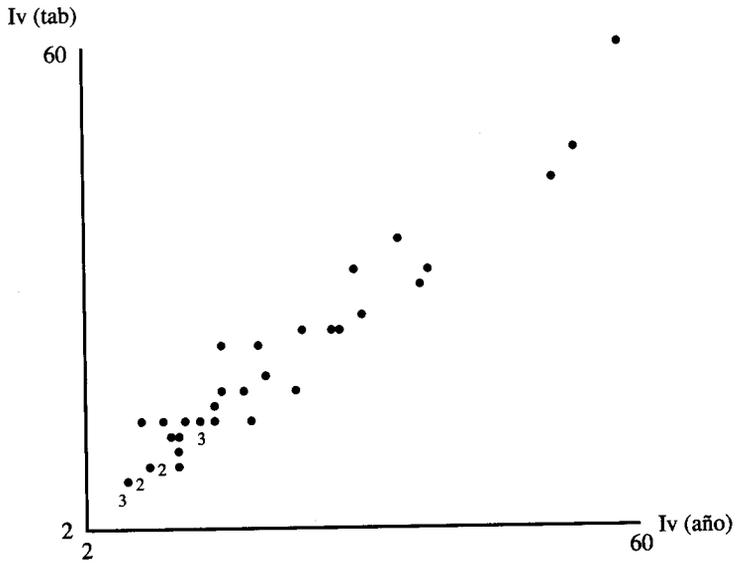


Fig. 2.—Comparación entre el crecimiento en volumen real y el estimado de 40 árboles de pino silvestre
Comparison between real and estimated annual increments of stem volume for forty Scots pines

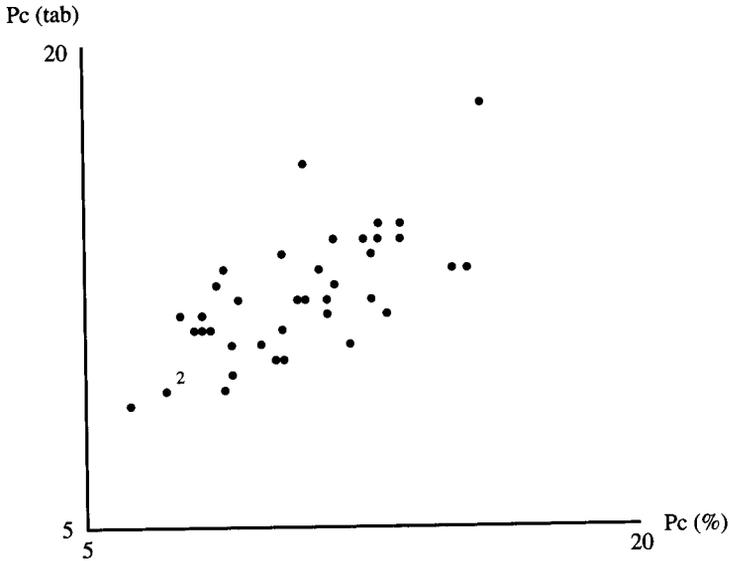


Fig. 3.—Comparación entre el porcentaje de corteza real y el estimado de 40 árboles de pino silvestre
Comparison between real and estimated bark percentages of stem volume for forty Scots pines

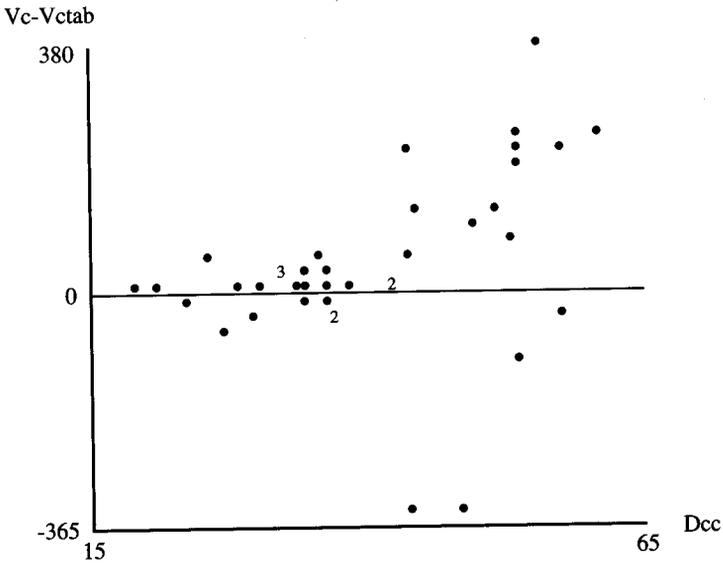


Fig. 4.—Precisión en la estimación del volumen de fuste de 40 árboles de pino silvestre
Accuracy of stem volume estimation for forty Scots pines

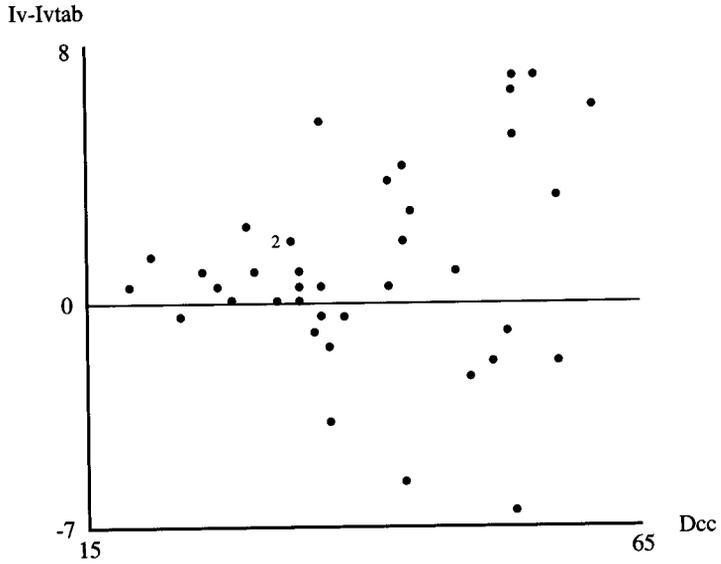


Fig. 5.—Precisión en la estimación del crecimiento en volumen de 40 árboles de pino silvestre
Accuracy of stem volume annual increment estimation for forty Scots pines

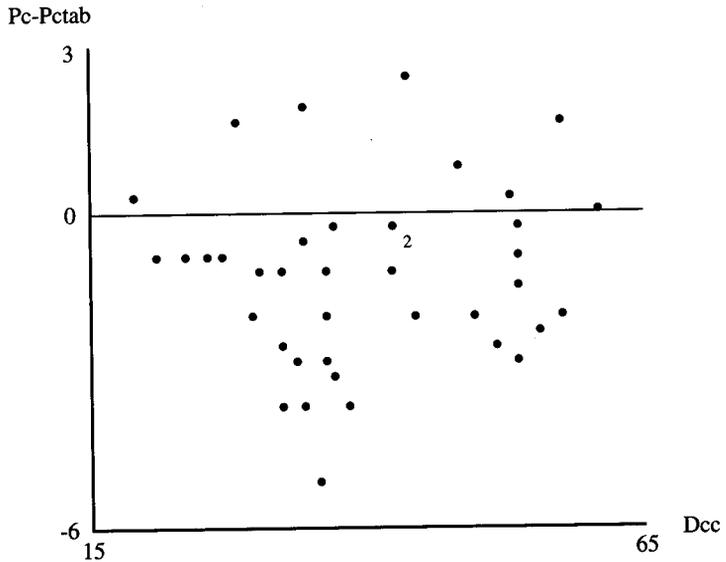


Fig. 6.—Precisión en la estimación del porcentaje de corteza de 40 árboles de pino silvestre
Accuracy of stem volume bark percentage estimation for forty Scots pines

Finalmente, y siguiendo las recomendaciones del apartado anterior (Validación de los Modelos), para la adecuación de las tablas a este monte en particular la forma de operar sería, para cada una de las variables estimadas, la siguiente:

1.º Volumen del fuste con corteza

Se calcula el índice de corrección como cociente entre los valores reales de la muestra y los obtenidos con la tabla de cubicación:

$$p_1' = \frac{v_{\text{real}}}{v_{\text{tabla}}} = \frac{1133,53}{1110,03} = 1,0212$$

Al ser la diferencia en valor absoluto de $1 - p'$ superior a 0,01 (en este caso es de 0,021) sería conveniente corregir la ecuación propuesta o lo que es lo mismo, aplicar al volumen estimado a partir de la ecuación de tres entradas el índice o coeficiente calculado p_1' . De este modo, el volumen de un lote cualquiera de árboles de esta zona en concreto quedaría estimado con más precisión, sin tener que modificar la tabla, operando de la siguiente forma:

$$v \text{ (c.c) (m}^3\text{)} = 1,0212 v_{\text{tabla}} \text{ (m}^3\text{)}$$

2.º Crecimiento anual del volumen de fuste sin corteza

Se calcula el índice de corrección como cociente entre los valores reales de la muestra y los obtenidos con la tabla de estimación del crecimiento corriente:

$$p_2' = \frac{Iv_{\text{real}}}{Iv_{\text{tabla}}} = \frac{18,561}{17,702} = 1,0485$$

Siendo la diferencia en valor absoluto de $1 - p'$ superior a 0,01 (en esta ocasión es de 0,0485) también sería conveniente afectar al crecimiento del lote de árboles analizado del índice p_2' , quedando de la siguiente forma:

$$Iv \text{ (m}^3\text{/año)} = 1,0485 Iv_{\text{tabla}} \text{ (m}^3\text{/año)}$$

3.º Porcentaje de corteza del volumen

Se calcula el índice de corrección como cociente entre los valores reales de la muestra y los obtenidos con la tabla de estimación del porcentaje de corteza:

$$p_3' = \frac{Pc_{\text{real}}}{Pc_{\text{tabla}}} = \frac{10,35}{11,78} = 0,8786$$

Siendo la diferencia en valor absoluto de $1 - p'$ superior a 0,01 (en este caso alcanza el valor de 0,1214, el máximo como se intuía en la representación gráfica) vuelve a ser recomendable multiplicar el porcentaje de corteza estimado del lote de árboles por el índice p_3' , obteniendo el siguiente resultado:

$$Pc \text{ (\%)} = 0,8786 Pc_{\text{tabla}} \text{ (\%)}$$

Para finalizar, y con el objeto de comparar los resultados en la estimación del volumen de este lote de árboles con otras ecuaciones de ámbito general que se han citado anteriormente, se presentan los valores obtenidos con la aplicación de las siguientes tablas de cubicación:

PITA (1967):

$$v = -28,34 + 2,16 h + 16,59 d^2 + 2,794 d^2h$$

Siendo:

v = volumen c.c. fuste hasta 7 cm en punta delgada (dm³).

d = diámetro normal (dm).

h = altura total (m).

1.º IFN (1979):

$$v = 39,42 + 0,03561 d^2h \text{ (Segovia)}$$

Siendo:

v = volumen c.c. fuste hasta 7,5 cm en punta delgada (dm³).

d = diámetro normal (dm).

h = altura total (m).

Se presentan también los valores de los errores relativos de las estimaciones expresados como:

$$e (\%) = \frac{V_{est} - V_r}{V_r} 100$$

Siendo «Vest» el volumen del lote estimado por cualquiera de las ecuaciones de cubicación y «Vr» el volumen real.

TABLA 7

**VOLUMEN REAL DEL FUSTE CON CORTEZA DE 40 ARBOLES
DE PINO SILVESTRE Y VOLUMENES ESTIMADOS
CON LAS ECUACIONES DE TRES ENTRADAS, LAS ECUACIONES
DE PITA (1967) Y LAS ECUACIONES DEL I INVENTARIO FORESTAL
NACIONAL. VALSAIN (SEGOVIA) ERRORES RELATIVOS**

*Comparison among real timber volume of forty Scots pine and estimated volumes
using three variables equation and other spanish equations*

	Media	D. típica	Mínimo	Máximo	e (%)
V (dm ³) real	1.133,5	751,04	155,3	2.809,8	-
V (dm ³) 3 ent.	1.110,0	685,86	164,5	2.583,4	-2,07
V (dm ³) PITA	1.197,2	747,10	171,2	2.829,3	+5,62
V (dm ³) 1 IFN	1.201,5	755,75	189,4	2.859,7	+6,00

Aunque no se deben sacar conclusiones generales relativas a la precisión en la estimación del volumen de las tres ecuaciones utilizadas, sí se puede afirmar que, para este lote de árboles, la ecuación de tres entradas que se propone en estas páginas ha resultado ser la más precisa.

SUMMARY

Allometric equations with three variables: volume, growth and bark estimation for the main Spanish tree species

Some allometric functions with three predicting variables are presented, providing for the most common species of the Spanish managed forests the following items:

- Stem volume.
- Annual increment.
- Bark percentage.

The use of these functions of general scope, allows to replace measurements on, felled trees for the measurement on standing trees of the following predicting variables:

- B.h. diameter.
- Total height.
- Diameter at 4 m height.
- Bark thickness.
- Diameter increment of last 5 or 10 years.

From these measurements, analytically, management tariff-tables can be obtained for the calculation of volume, increment, and bark.

KEY WORDS: Forest management
Stem volume
Annual volume increment
Bark percentage
Tariff-tables
Three variables equations

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- AVERY T. E., BURKHART H. E., 1983. Forest Measurement. 3.^a Ed. McGraw-Hill Company, New York.
- CARBONELL E., DENIS J. B., GONZALEZ F., PRUÑONOSA V., 1983. Regresión linal. Un enfoque conceptual y práctico. Monografías INIA, 43. INIA. Madrid.
- CHEVROU R. B., 1986. Construction et utilisation d'un tarif de cubage. Ministère de l'Agriculture. Inventaire Forestier National. Antenne Recherches.
- IFN, 1979. La coníferas en el primer Inventario Forestal Nacional. Sección de Inventario y Mapas. ICONA. Madrid.
- IFN, 1979. Las frondosas en el primer Inventario Forestal Nacional. Sección de Inventario y Mapas. ICONA. Madrid.
- MACKAY E., 1949. Fundamentos y Métodos de Ordenación de Montes. Sección de Publicaciones. Escuela Especial de Ingenieros de Montes. Madrid.
- MARTINEZ MILLAN J., 1978. Una normalización de los inventarios por muestreo para la Ordenación de montes. Reproducida por ICONA y distribuida a los asistentes a la reunión sobre Ordenación de Montes en San Rafael.
- MARTINEZ MILLAN J., ARA LAZARO P., GONZALEZ DONCEL I., 1992. Tablas de cubicación de tres entradas para su uso en la Ordenación de Montes. Invest. agrar., Sist. recur. for. Vol. 1 (1): 95-102.

- McCLURE J. P., SCHREUDER H. T., WILSON R. L., 1983. A comparison of several volume tables equations for Loblolly Pine and White Oak. Reseach Paper SE-240. Suteastern Forest Exp. Station. USDA Forest Servie.
- MORO J., 1969. Mecanización del cálculo de los Inventarios Forestales por Doble Muestreo con Regresión. Gabinete de Cálculo. IFIE.
- PARDÉ J., 1961. Dendrométrie. Editions de l'Ecole Nationale de Eaux et Forêts. Nancy.
- PITA P. A., 1967. Tablas de cubicación por diámetros normales y alturas totales. Ministerio de Agricultura. IFIE. Madrid.
- SCHMID-HASS P., WINZELER K., 1981. Efficient determination of volume and volume growth. Proceedings of 17th IUFRO World Congress. 231-257.
- SPURR, 1952. Forest Inventory. The Ronald Press Company. New York.